



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Cuadernillo para Curso Propedéutico 2021



INGENIERÍA EN GESTIÓN EMPRESARIAL



Carretera Nacional S/N km.202
C.P. 5910 Jiquilpan, Michoacán.
Tel. (353) 5331126, 5333091, 5332348 y
5333608

tecnm.mx | jiquilpan.tecnm.mx





CURSO PROPEDÉUTICO 2021 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA



Tabla de contenido

I. ESTADISTICA DESCRIPTIVA.....	4
II. TÉCNICAS DE CONTEO	25
III. PROBABILIDAD	49



I. ESTADISTICA DESCRIPTIVA.

CONCEPTO.

¿Qué es la estadística descriptiva o para qué nos sirve?

Cuando necesitamos analizar un proceso cualquiera, es necesario tomar una muestra de datos del proceso en cuestión y a partir de los mismos obtener sus características tales como la media, la mediana, la moda, la desviación estándar, el rango, etc., también es necesario saber el tipo de distribución de probabilidad que tiene, así como también es necesario visualizar de forma objetiva el comportamiento de los datos al ser graficados de diversas formas, todo lo anterior es posible gracias a la estadística descriptiva.

¿Qué es una muestra? Es una parte de los datos del proceso que se desea analizar, la cual debe de ser representativa del proceso en cuanto al número de elementos que contiene y en cuanto a lo que está ocurriendo en el proceso, esto último se logra tomando cada uno de los elementos de la muestra de forma aleatoria o totalmente al azar; para determinar el número de elementos idóneo en la muestra se hace uso de la inferencia estadística, por el momento no nos ocuparemos de ello debido a que esto se ve con detalle en cursos más avanzados de estadística.

TRATAMIENTO PARA DATOS NO AGRUPADOS.

¿A qué se refiere esto? Cuando la muestra que se ha tomado de la población o proceso que se desea analizar, es decir, tenemos menos de 20 elementos en la muestra, entonces estos datos son analizados sin necesidad de formar clases con ellos y a esto es a lo que se le llama tratamiento de datos no agrupados.

B1. Medidas de tendencia central. Se les llama medidas de tendencia central a la media aritmética, la mediana, la media geométrica, la moda, etc. debido a que al observar la distribución de los datos, estas tienden a estar localizadas



generalmente en su parte central. A continuación definiremos algunas medidas de tendencia central y la forma de calcular su valor.

B2. Media aritmética ($\bar{x}$). También se conoce como promedio ya que es el promedio de las lecturas o mediciones individuales que se tienen en la muestra, se determina con la fórmula siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Donde:

$\bar{x}$ = media aritmética

x_i = dato i

n = número de datos en la muestra

Ejemplos:

1. Se han tomado como muestra las medidas de seis cables usados en un arnés para lavadora, las cuales son; 15.2 cm, 15.0, 15.1, 15.2, 15.1 y 15.0, determine su media aritmética.

Solución:

$$\bar{x} = \frac{15.2+15.0+15.1+15.2+15.1+15.0}{6} = 15.1cm$$

2. Se toman varias muestras de cierto tipo de queso y se determina la cantidad de proteína por cada 100 gramos de queso, encontrándose lo siguiente: 26.5 gramos, 24.8, 25.3, 30.5, 21.4, determine la cantidad promedio de proteína encontrada en la muestra por cada 100 gramos de queso que se elabora.



Solución:

$$\bar{x} = \frac{26.5+24.8+25.3+30.5+21.4}{5} = 25.7 \text{ grs}$$

3. Se hacen varias lecturas de una muestra que contiene cobre, las lecturas se hacen en un espectrofotómetro de absorción atómica y son la siguientes: 12.3%, 12.28, 12.27, 12.3, 12.24, 15.01, determine la concentración promedio de Cu en la muestra.

Solución:

$$\bar{x} = \frac{12.3+12.28+12.27+12.3+12.24+15.01}{6} = \frac{76.4}{6} = 12.73\%Cu$$

Si observamos las lecturas del espectrofotómetro nos damos cuenta que el valor de 15.01% es un valor diferente al de las lecturas anteriores, por lo que se descarta el valor ya que se considera un valor atípico, es decir un valor que es debido a circunstancias especiales, en este caso puede ser que se deba al hecho de que se está descalibrando el aparato de absorción atómica o simplemente que se ha equivocado el operador del aparato al tomar la lectura, por lo que la media se debe calcular con las primeras cinco lecturas; como se muestra a continuación:

Solución:

$$\bar{x} = \frac{12.3+12.28+12.27+12.3+12.24}{5} = \frac{61.39}{5} = 12.278\%Cu$$

Esta sería la media correcta

4. Si deseamos determinar la edad promedio de los estudiantes de una escuela de nivel superior al iniciar sus estudios, suponga que se toman las edades de algunos de los alumnos de cierta clase y estas son las que siguen: 20, 18, 18, 19, 18, 19, 35, 20, 18, 18, 19.



Solución:

Luego, la media se determinará con solo 10 de las edades ya que es necesario descartar la edad de 35 años, que es un dato atípico o un caso especial, por lo que;

$$\bar{x} = \frac{20+18+18+19+18+19+20+18+18+19}{10} = \frac{187}{10} = 18.7 \text{ años}$$

Nota: Cuando es necesario determinar aquellas medidas de tendencia central que hagan uso de todos los datos de la muestra se recomienda descartar todos aquellos datos atípicos que se encuentren en la muestra o muestras tomadas.

2) Media geométrica (G). Es la raíz en enésima del producto de los valores de los elementos de la muestra, es usada cuando los valores de los datos de la muestra no son lineales, es decir que su valor depende de varios factores a la vez, se determina de la siguiente forma:

$$G = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * ... * x_n}$$

Donde:

G = media geométrica

x_i = dato i

n = número de datos en la muestra



Ejemplos:

1. Las siguientes temperaturas han sido tomadas de un proceso químico, 13.4°C, 12.8, 11.9, 13.6, determine la temperatura promedio de este proceso.

Solución:

$$G = \sqrt[4]{13.4 \times 12.8 \times 11.9 \times 13.6} = \sqrt[4]{27758.7968} = 12.9077 \text{ } ^\circ\text{C}$$

2. Las siguientes temperaturas han sido tomadas de un proceso para fabricar queso chihuahua, 21.4°C, 23.1, 20.2, 19.7, 21.0, determine la temperatura promedio de este proceso.

Solución:

$$G = \sqrt[5]{21.4 \times 23.1 \times 20.2 \times 19.7 \times 21.0} = \sqrt[5]{4131070.852} = 21.048 \text{ } ^\circ\text{C}$$

3. Media aritmética ponderada (x^w). Esta media se usa cuando el peso que tiene cada uno de los datos de la muestra es diferente, se calcula de la siguiente manera:

$$x^w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Donde:

x^w = media aritmética ponderada

x_i = dato i

w_i = peso del dato i



Ejemplo:

A continuación se mencionan las materias que Luis Pérez llevó en el primer semestre de Ingeniería Química, el número de créditos y la calificación obtenida;

MATERIA	NUMERO CREDITOS	CALIFICACIÓN
Metodología de la investigación	8	90.5
Matemáticas I	10	100.0
Programación	8	81.0
Química	10	78.0
Dibujo	4	100.0
Economía	8	84.0

Determine la calificación promedio que obtuvo Luis Pérez en su primer semestre.

Solución:

$$X^w = \frac{(8 \times 90.5) + (10 \times 100.0) + (8 \times 81.0) + (10 \times 78.0) + (4 \times 100.0) + (8 \times 84.0)}{8 + 10 + 8 + 10 + 4 + 8} =$$
$$= \frac{724 + 1000 + 648 + 780 + 400 + 672}{48} = \frac{4224}{48} = 88.0$$

Nota: Si comparamos este promedio con el que se obtiene usando simplemente la media aritmética, que es un 88.91, nos damos cuenta de que este último es mayor, por no tomar en cuenta el peso o número de créditos que aporta cada materia a la carrera que se estudia, el promedio de esta persona es menor al de la media aritmética debido a que obtiene una calificación baja en Química que es una de las materias que aporta más créditos.

4. Media armónica (H). La media armónica se define como el recíproco del promedio de los recíprocos de cada uno de los datos que se tienen en la muestra,

Se determina de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Ejemplo: Determine la media armónica de los siguientes datos, 3.1, 2.8, 2.84, 3.05, 3.09

Solución:

$$H = \frac{5}{\frac{1}{3.1} + \frac{1}{2.8} + \frac{1}{2.84} + \frac{1}{3.05} + \frac{1}{3.09}} =$$
$$= \frac{5}{0.3226 + 0.3571 + 0.3521 + 0.3279 + 0.3236} = \frac{5}{1.6833} = 2.9703$$

5. Mediana (x_{med}). La mediana es aquel valor que se encuentra en la parte central de los datos que se tienen en la muestra una vez que estos han sido ordenados según su valor o magnitud. Para calcular la mediana se presentan dos casos:

a. Cuando el número de datos en la muestra es impar.- En este caso después de ordenar los datos de la muestra en cuanto a su magnitud, es decir de mayor a menor valor o de menor a mayor valor, se procede a localizar aquel dato que se encuentra justo en el centro de los datos o en la parte central de los mismos, el valor de este dato será el que dé valor a la mediana.



Ejemplo:

Los siguientes datos son las mediciones obtenidas de un circuito utilizado en un arnés de lavadora; se toman como muestra siete circuitos y sus mediciones son: 11.3, 11.2, 11.5, 11.2, 11.2, 11.4, 11.5 cm.

Solución:

Ordenando los datos de menor a mayor valor;

11.2, 11.2, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.5

Se observa que el dato 11.3 es el que queda en la parte central, por lo que este es el que dará valor a la mediana; entonces,

$$x_{\text{med}} = 11.3 \text{ cm.}$$

b. Cuando el número de datos en la muestra es par.- En este caso después de ordenar los datos en cuanto a su magnitud, observamos que en la parte central de los datos no se encuentra dato alguno, en este caso, la mediana tomará el valor del promedio de dos datos; el que se encuentra antes de la parte central y el que se encuentra después de la parte central.

Ejemplo:

Los siguientes datos son las mediciones obtenidas de un circuito utilizado en un arnés de lavadora; se toman como muestra ocho circuitos y sus mediciones son: 11.3, 11.2, 11.5, 11.2, 11.2, 11.4, 11.5, 11.4 cm.

Solución:

Ordenando los datos de mayor a menor valor,

11.5, 11.4, 11.4, 11.3, 11.2, 11.2, 11.2, 11.1 cm.



Se observa que en la parte central de los datos no hay dato alguno por lo que la mediana se determina con el promedio de los datos subrayados, entonces,

$$X_{med} = \frac{11.3+11.2}{2} = 11.25cm$$

Nota: Es imprescindible para calcular el valor de la mediana el que primero se ordenen los datos en cuanto a su magnitud, ya que de no hacerlo, se incurriría en un grave error.

5) Moda (x_{mod}). La moda se define como aquel valor o valores que más se repiten o que tienen mayor frecuencia entre los datos que se han obtenido en una muestra, la muestra de una población nos genera la distribución de los datos una vez que estos se han graficado y en esta gráfica es posible observar la moda o modas de la misma, es por esto que una distribución de datos puede ser a modal (carece de moda), unimodal (tiene una sola moda), bimodal (tiene dos modas) o polimodal (tiene más de dos modas).

Ejemplos:

1. Determine la moda de los datos que se muestran a continuación, se refieren a la estatura de un grupo de jóvenes; 1.60m, 1.65, 1.70, 1.71, 1.70, 1.70, 1.70, 1.71, 1.70, 1.93, 1.87, 1.85

Solución:

Estatura	Frecuencia
1.60	1
1.65	1
1.70	5*
1.71	2
1.85	1
1.87	1
1.93	1



La tabla muestra la distribución de frecuencias de los datos o el número de veces que estos se repiten, la mayor frecuencia que es 5 corresponde a una estatura de 1.70m, por lo que esta sería la moda.

Luego, $x_{\text{mod}} = 1.70\text{m}$

2. Determine la moda de los siguientes datos que se refieren a la edad de alumnos de primer semestre del tecnológico de Chihuahua, 18 años, 17, 19, 21, 19, 18, 22, 22, 18, 18, 17, 19, 19, 19, 18, 20, 21, 20, 18, 19, 18, 19, 18, 19, 22, 35

Solución:

Edad	Frecuencia
17	2
18	7*
19	8*
20	2
21	2
22	3
35	1

En este caso se observa que las edades que más frecuencia tienen son las de 18 y 19 años, por lo que se concluye que existen dos modas,

$X_{\text{mod1}} = 18$ años, $X_{\text{mod2}} = 19$ años

Hay que hacer notar que la frecuencia para ambas modas puede ser de igual magnitud o diferente, como en el caso que se ilustra.

b2. Medidas de Dispersión. Cuando se tiene una muestra de datos obtenida de una población cualquiera, es importante determinar sus medidas de tendencia central así como también es básico el determinar que tan dispersos están los datos en la muestra, por lo que se hace necesario determinar su rango, la varianza, la



Desviación estándar, etc., ya que una excesiva variabilidad o dispersión en los datos indica la inestabilidad del proceso en análisis en la mayoría de los casos.

1) Rango o recorrido. El rango es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor encontrado en la muestra, también se le denomina recorrido ya que nos dice entre que valores hace su recorrido la variable de interés; y se determina de la siguiente manera:

$$R = V_M - V_m$$

Donde:

R = rango o recorrido

V_M = valor mayor en la muestra

V_m = valor menor en la muestra

Ejemplo:

1. Se han tomado como muestras las mediciones de la resistencia a la tensión de la soldadura usada para unir dos cables, estas son: 78.5kg, 82.4, 87.3, 78.0, 90.0, 86.5, 77.9, 92.4, 75.9, determine su rango o recorrido.

Solución:

$$V_M = 92.4 \text{ kg}$$

$$V_m = 75.9 \text{ kg}$$

$$R = V_M - V_m = 92.4 - 75.9 = 16.5 \text{ kg}$$

2. Se toman las mediciones de la cantidad de grasa de la leche en gramos por cada 100 ml de leche que entra a un proceso de pasteurización, a continuación se enumeran; 14.85, 15.32, 12.76, 16.29, 15.84, 17.3, 17.61, 16.33, determine el rango o recorrido de la cantidad de grasa de la leche.



Solución:

$$V_M = 17.61$$

$$V_m = 12.76$$

$$R = 17.61 - 12.76 = 4.85\text{gramos}$$

2) Desviación absoluta media ($\bar{d}$). Esta medida de dispersión nos representa la diferencia absoluta promedio que existe entre cada dato que se encuentra en la muestra y la media de los datos y se determina de la siguiente manera:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Donde:

x_i = dato i

$\bar{x}$ = media aritmética de la muestra

n = número de datos en la muestra

Ejemplo:

1. Determine la desviación absoluta media de los siguientes datos que son las concentraciones de plomo de algunas muestras, las que a continuación se enumeran: 18gr, 12, 21, 19, 16, 20, 22

Solución:

Para determinar la desviación absoluta media o promedio, lo primero que hay que hacer es calcular la media aritmética de los datos de la muestra, la que es $128/7 = 18.286$, luego se procede a calcular el promedio de las diferencias absolutas entre cada dato y la media calculada.

$$\bar{d} = \frac{|18-18.286| + |12-18.286| + \dots + |20-18.286| + |22-18.286|}{7} =$$

$$\bar{d} = \frac{0.286 + 6.286 + 2.714 + 0.714 + 2.286 + 1.714 + 3.714}{7} = \frac{17.714}{7} = 2.5305\text{gr}$$

La interpretación de este resultado sería que el grado de alejamiento absoluto promedio de los datos con respecto a su media es de 2.5305 gramos.

¿Por qué sacar el valor absoluto de las diferencias entre cada dato y la media aritmética? Si solo se hicieran diferencias entre cada dato y la media aritmética, estas tendrían signos positivos y negativos ya que algunos datos son menores que la media y otros son mayores que la media, luego al sumar las diferencias, con sus signos correspondientes, éstas se irían anulando unas con otras y no sería posible medir el grado de alejamiento promedio de los datos en la muestra.

3) Varianza o variancia (s^2). Es el promedio de las diferencias elevadas al cuadrado entre cada valor que se tiene en la muestra (x_i) y la media aritmética ($\bar{x}$) de los datos y se determina de la siguiente manera:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \bar{x} \right)^2}{n - 1}$$

Donde n es el número de datos en la muestra.



Ejemplo:

Los siguientes datos es la cantidad de glucosa en miligramos encontrada en muestras de sangre de algunos pacientes, 14.2, 12.1, 15.6, 18.1, 14.3, determine su varianza.

Solución:

Lo primero que hay que calcular es la media aritmética de la muestra como ya se ha hecho anteriormente.

$$\bar{x} = \frac{14.2+12.1+15.6+18.1+14.3}{5} = \frac{74.3}{5} = 14.86mg$$

$$s^2 = \frac{(14.2-14.86)^2 + (12.1-14.86)^2 + \dots + (14.3-14.86)^2}{5-1} =$$

$$s^2 = \frac{0.4356 + 7.6176 + 0.5476 + 10.4976 + 0.3136}{4} = \frac{19.412}{4} = 4.853mg^2$$

Nota:

Dentro de la inferencia estadística se plantea la deferencia entre una variancia muestral s^2 y una poblacional, representada por σ^2 .

4) Desviación estándar (s). Es la desviación o diferencia promedio que existe entre cada dato de la muestra y la media aritmética de la muestra. Y se obtiene a partir de la varianza, sacándole raíz cuadrada.

$$s = \sqrt{s^2}$$



Donde:

s^2 = varianza o variancia

Por tanto la desviación estándar de la muestra anterior sería;

$$s = \sqrt{4.853mg^2} = 2.2029mg$$

La interpretación de este resultado sería, que la cantidad de glucosa encontrada en la muestra es en promedio de 14.86 miligramos y que la cantidad de glucosa en la muestra se aleja o dispersa en promedio 1.9704 mg alrededor de la media.

En este caso solo nos interesa conocer el significado de la desviación estándar, aunque es necesario decir que s es la desviación de la muestra y que σ es la desviación de la población, así como s^2 es la varianza de la muestra y σ^2 es la varianza de la población.

TRATAMIENTO PARA DATOS AGRUPADOS.

Cuando la muestra consta de 30 o más datos, lo aconsejable es agrupar los datos en clases y a partir de estas determinar las características de la muestra y por consiguiente las de la población de donde fue tomada.

Antes de pasar a definir cuál es la manera de determinar las características de interés (media, mediana, moda, etc.) cuando se han agrupado en clases los datos de la muestra, es necesario que sepamos cómo se agrupan los datos.

Pasos para agrupar datos.

- a. Determinar el rango o recorrido de los datos.

$$\text{Rango} = \text{Valor mayor} - \text{Valor menor}$$

- b. Establecer el número de clases (k) en que se van a agrupar los datos tomando como base para esto la siguiente tabla.



Tamaño de muestra o No. de datos	De Número de clases
Menos de 50	5 a 7
50 a 99	6 a 10
100 a 250	7 a 12
250 en adelante	10 a 20

El uso de esta tabla es uno de los criterios que se puede tomar en cuenta para establecer el número de clases en las que se van a agrupar los datos, existen otros para hacerlo.

c. Determinar la amplitud de clase para agrupar (C).

$$C = \frac{\text{Rango}}{k}$$

d. Formar clases y agrupar datos.

Para formar la primera clase, se pone como límite inferior de la primera clase un valor un poco menor que el dato menor encontrado en la muestra y posteriormente se suma a este valor C, obteniendo de esta manera el límite superior de la primera clase, luego se procede a obtener los límites de la clase siguiente y así sucesivamente.

Ejemplo:

Los siguientes datos se refieren al diámetro en pulgadas de un engrane.

6.75	7.00	7.00	6.75	6.50	6.50	7.15	7.00
6.50	6.50	6.50	6.25	6.25	6.50	6.65	7.00
7.25	6.70	6.00	6.75	6.00	6.75	6.75	7.10
7.00	6.70	6.50	6.75	6.25	6.65	6.75	7.10
7.25	6.75	6.25	6.25	7.00	6.75	7.00	7.15



- Agrupe datos, considere $k=6$.
- Obtenga: Histograma, polígono de frecuencias, ojiva y distribución de probabilidad.
- Obtenga: media, mediana, moda y desviación estándar.

Solución:

- Agrupando datos;

$$1. \quad R = VM - Vm = 7.25 - 6.00 = 1.25$$

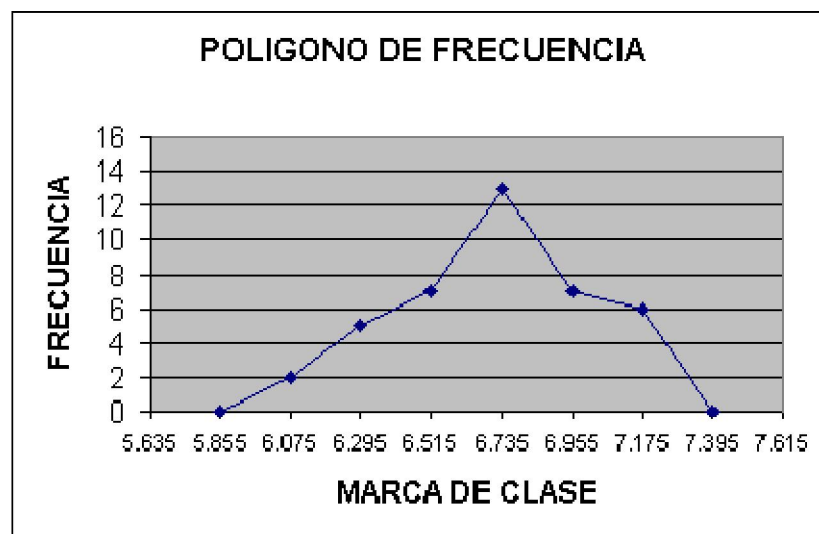
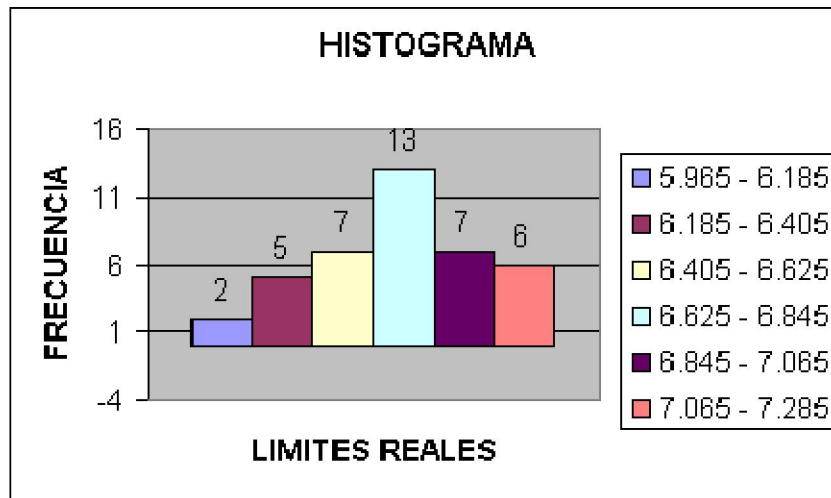
$$2. \quad k = 6$$

$$3. \quad C = \frac{R}{k} = \frac{1.25}{6} = 0.2083 \approx 0.21$$

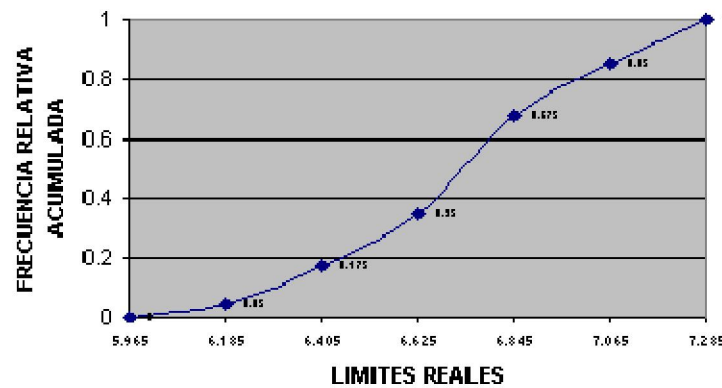
4. Formando clases.

Para formar la primera clase se toma un valor un poco menor que el valor menor encontrado en la muestra; luego,

LI	LS	Frecuencia	Marca de clase	Límite real inferior	Límite real superior	Frecuencia relativa	Frecuencia Relativa acumulada
5.97 – 6.18	2		6.075	5.965	6.185	$2/40 = 0.05$	0.05
6.19 – 6.40	5		6.295	6.185	6.405	$5/40=0.125$	0.175
6.41 – 6.62	7		6.515	6.405	6.625	0.175	0.350
6.63 – 6.84	13		6.735	6.625	6.845	0.325	0.675
6.85 – 7.06	7		6.955	6.845	7.065	0.175	0.850
7.07 – 7.28	6		7.175	7.065	7.285	0.15	1.000
Total	40					1.000	



OJIVA "MENOR QUE" O CRECIENTE



DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD



a) Media ($\bar{x}$).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i * f_i}{n} = \frac{(6.075)(2) + (6.295)(5) + \dots + (7.175)(6)}{40} = \frac{12.15 + 31.475 + \dots + 43.05}{40} = \frac{268.52}{40} = 6.713 \text{ pulg adas}$$



Donde:

k = número de clases

x_i = marca de clase i

f_i = frecuencia de la clase i

$$n = \sum_{i=1}^k f_i = \text{número de datos en la muestra}$$

b) Mediana (X_{med}).

$$X_{med} = Li + \left[\frac{n/2 - F_{me-1}}{f_{me}} \right] A = 6.625 + \left[\frac{40/2 - 14}{13} \right] (0.22) = 6.7265$$

Donde:

Li = límite real inferior de la clase que contiene a la mediana

F_{me-1} = sumatoria de las frecuencias anteriores a la clase en donde se encuentra la mediana

f_{me} = frecuencia de la clase en donde se encuentra la mediana

A = amplitud real de la clase en donde se encuentra la mediana

A = LRS-LRI

LRS = límite real superior de la clase que contiene a la mediana

LRI = límite real inferior de la clase que contiene a la mediana

N = número de datos en la muestra

f) Moda (X_{mod}).

$$X_{mod} = Li + \left[\frac{d1}{d1 + d2} \right] A = 6.625 + \left[\frac{6}{6 + 6} \right] (0.22) = 6.735 \text{ pulgadas}$$

Donde:

Li = límite real inferior de la clase que contiene a la moda

$$d_1 = |fmo - fmo - 1| = |13 - 7| = 6$$

$$d_2 = |fmo - fmo + 1| = |13 - 7| = 6$$

fmo = frecuencia de la clase que contiene a la moda

$fmo-1$ = frecuencia de la clase anterior a la que contiene a la moda

$fmo+1$ = frecuencia de la clase posterior a la que contiene a la moda

A = amplitud real de la clase que contiene a la moda

$A = LRS - LRI$

LRS = límite real superior de la clase que contiene a la moda

LRI = límite real inferior de la clase que contiene a la moda

g) Desviación estándar (S).

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (xi - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^k f_i - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (xi - \bar{x})^2 f_i}{n - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6.075 - 6.713)^2(2) + (6.295 - 6.713)^2(5) + \dots + (7.175 - 6.713)^2(6)}{40 - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0.814088 + 0.87362 + \dots + 1.280664}{39}} = \sqrt{\frac{3.65904}{39}} = 0.3063 \text{ pulgadas}$$

Donde:

x_i = marca de clase i

$\bar{x}$ = media aritmética

f_i = frecuencia de la clase i

$$\sum_{i=1}^k f_i = n = \text{número total de datos en la muestra}$$



II. TÉCNICAS DE CONTEO

A) CONCEPTO.

Suponga que se encuentra al final de una línea de ensamble final de un producto y que un supervisor le ordena contar los elementos de un lote que se ha manufacturado hace unas horas y del que se desconoce el número de productos que lo constituyen, de inmediato usted empezará a contar un producto tras otro y al final informará al supervisor que son, 48, 54 u otro número cualquiera. Ahora suponga que ese mismo supervisor le plantea la siguiente pregunta ¿cuántas muestras o grupos será posible formar con los productos del lote, si las muestras o grupos a formar son de ocho elementos cada una de ellas?.

En el primer caso el cuantificar los elementos del lote no presenta dificultad alguna para la persona encargada de hacerlo, pero cuando se le hace el segundo planteamiento, al tratar de formar las muestras o grupos de ocho elementos la persona encargada empezará a tener dificultad para hacerlo, en casos como este es necesario hacer uso de las técnicas de conteo para cuantificar los elementos del evento en cuestión (el número de muestras posibles a formar de ocho elementos), luego, ¿qué son las técnicas de conteo?

Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar.

Ejemplos en los que definitivamente haremos uso de las técnicas de conteo serían:

-¿Cuántas comisiones pro limpieza del instituto se pueden formar si hay 150 alumnos que desean ayudar en esta tarea y se desea formar comisiones de ocho alumnos?

-¿Cuántas representaciones de alumnos pueden ser formadas a) si se desea que estas consten solo de alumnos de Ingeniería Química?, b) se desea que el presidente sea un químico?, c) se desea que el presidente y tesorero sean químicos? Para todos los casos, se desea que las representaciones consten de once alumnos.

-¿Cuántas maneras tiene una persona de seleccionar una lavadora, una batidora y dos licuadoras, si encuentra en una tienda 8 modelos diferentes de lavadoras, 5 modelos diferentes de batidoras y 7 modelos diferentes de licuadoras?

Se les denomina técnicas de conteo a: las combinaciones, permutaciones y diagrama de árbol, las que a continuación se explicarán y hay que destacar que éstas nos proporcionan la información de todas las maneras posibles en que ocurre un evento determinado.



Las bases para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio multiplicativo y el aditivo, los que a continuación se definen y se hace uso de ellos.

B) PRINCIPIO MULTIPLICATIVO.

Si se desea realizar una actividad que consta de r pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de N_1 maneras o formas, el segundo paso de N_2 maneras o formas y el r -ésimo paso de N_r maneras o formas, entonces esta actividad puede ser llevada a efecto de;

$$N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r \text{ maneras o formas}$$

El principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos de la actividad debe ser llevado a efecto, uno tras otro.

Ejemplos:

1) Una persona desea construir su casa, para lo cuál considera que puede construir los cimientos de su casa de cualquiera de dos maneras (concreto o block de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o lámina galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?

Solución:

Considerando que $r = 4$ pasos

N_1 = maneras de hacer cimientos = 2

N_2 = maneras de construir paredes = 3

N_3 = maneras de hacer techos = 2

N_4 = maneras de hacer acabados = 1

$N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ maneras de construir la casa

El principio multiplicativo, el aditivo y las técnicas de conteo que posteriormente se tratarán nos proporcionan todas las maneras o formas posibles de como se puede llevar a cabo una actividad cualquiera.



2) ¿Cuántas placas para automóvil pueden ser diseñadas si deben constar de tres letras seguidas de cuatro números, si las letras deben ser tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9?, a. Si es posible repetir letras y números, b. No es posible repetir letras y números, c. Cuántas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D y empiezan por el cero, d. Cuántas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D seguida de la G.

Solución:

a. Considerando 26 letras del abecedario y los dígitos del 0 al 9

$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 75,760,000$ placas para automóvil que es posible diseñar

b. $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78,624,000$ placas para automóvil

c. $1 \times 25 \times 24 \times 1 \times 9 \times 8 \times 7 = 302,400$ placas para automóvil

d. $1 \times 1 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 120,960$ placas para automóvil

3) ¿Cuántos números telefónicos es posible diseñar, los que deben constar de seis dígitos tomados del 0 al 9?, a. Considere que el cero no puede ir al inicio de los números y es posible repetir dígitos, b. El cero no debe ir en la primera posición y no es posible repetir dígitos, c. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b empiezan por el número siete?, d. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b forman un número impar?.

Solución:

a. $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900,000$ números telefónicos

b. $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136,080$ números telefónicos

c. $1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15,120$ números telefónicos

d. $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 5 = 67,200$ números telefónicos

C) PRINCIPIO ADITIVO.

Si se desea llevar a efecto una actividad, la cuál tiene formas alternativas para ser realizada, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de M maneras o formas, la segunda alternativa puede realizarse de N maneras o formas..... y la última de las alternativas puede ser realizada de W maneras o formas, entonces esa actividad puede ser llevada a cabo de,

$M + N + \dots\dots\dots + W$ maneras o formas



Ejemplos:

1) Una persona desea comprar una lavadora de ropa, para lo cual ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirlpool, Easy y General Electric, cuando acude a hacer la compra se encuentra que la lavadora de la marca W se presenta en dos tipos de carga (8 u 11 kilogramos), en cuatro colores diferentes y puede ser automática o semiautomática, mientras que la lavadora de la marca E, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kilogramos), en dos colores diferentes y puede ser automática o semiautomática y la lavadora de la marca GE, se presenta en solo un tipo de carga, que es de 11 kilogramos, dos colores diferentes y solo hay semiautomática. ¿Cuántas maneras tiene esta persona de comprar una lavadora?

Solución:

M = Número de maneras de seleccionar una lavadora Whirlpool

N = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca Easy

W = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca General Electric

$$M = 2 \times 4 \times 2 = 16 \text{ maneras}$$

$$N = 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ maneras}$$

$$W = 1 \times 2 \times 1 = 2 \text{ maneras}$$

$$M + N + W = 16 + 12 + 2 = 30 \text{ maneras de seleccionar una lavadora}$$

2) Rafael Luna desea ir a las Vegas o a Disneylandia en las próximas vacaciones de verano, para ir a las Vegas él tiene tres medios de transporte para ir de Chihuahua al Paso Texas y dos medios de transporte para ir del Paso a las Vegas, mientras que para ir del paso a Disneylandia él tiene cuatro diferentes medios de transporte, a) ¿Cuántas maneras diferentes tiene Rafael de ir a las Vegas o a Disneylandia?, b) ¿Cuántas maneras tiene Rafael de ir a las Vegas o a Disneylandia en un viaje redondo, si no se regresa en el mismo medio de transporte en que se fue?.



Solución:

a) V = maneras de ir a las Vegas

D = maneras de ir a Disneylandia

$$V = 3 \times 2 = 6 \text{ maneras}$$

$$D = 3 \times 4 = 12 \text{ maneras}$$

$$V + D = 6 + 12 = 18 \text{ maneras de ir a las Vegas o a Disneylandia}$$

b) V = maneras de ir y regresar a las Vegas

D = maneras de ir y regresar a Disneylandia

$$V = 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12 \text{ maneras}$$

$$D = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72 \text{ maneras}$$

$$V + D = 12 + 72 = 84 \text{ maneras de ir a las Vegas o a Disneylandia en un viaje redondo}$$

¿Cómo podemos distinguir cuando hacer uso del principio multiplicativo y cuando del aditivo?

Es muy simple, cuando se trata de una sola actividad, la cual requiere para ser llevada a efecto de una serie de pasos, entonces haremos uso del principio multiplicativo y si la actividad a desarrollar o a ser efectuada tiene alternativas para ser llevada a cabo, haremos uso del principio aditivo.

D) PERMUTACIONES.

Para entender lo que son las permutaciones es necesario definir lo que es una combinación y lo que es una permutación para establecer su diferencia y de esta manera entender claramente cuando es posible utilizar una combinación y cuando utilizar una permutación al momento de querer cuantificar los elementos de algún evento.



COMBINACIÓN Y PERMUTACION.

COMBINACIÓN:

Es todo arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

PERMUTACIÓN:

Es todo arreglo de elementos en donde nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

Para ver de una manera objetiva la diferencia entre una combinación y una permutación, plantearemos cierta situación.

Suponga que un salón de clase está constituido por 35 alumnos. a) El maestro desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades tales como mantener el aula limpia o entregar material a los alumnos cuando así sea necesario.

b) El maestro desea que se nombre a los representantes del salón (Presidente, Secretario y Tesorero).

Solución:

a) Suponga que por unanimidad se ha elegido a Daniel, Arturo y a Rafael para limpiar el aula o entregar material, (aunque pudieron haberse seleccionado a Rafael, Daniel y a Enrique, o pudo haberse formado cualquier grupo de tres personas para realizar las actividades mencionadas anteriormente).

¿Es importante el orden como se selecciona a los elementos que forma el grupo de tres personas?

b) Suponga que se han nombrado como representantes del salón a Daniel como Presidente, a Arturo como secretario y a Rafael como tesorero, pero resulta que a alguien se le ocurre hacer algunos cambios, los que se muestran a continuación:



CAMBIOS

PRESIDENTE:	Daniel	Arturo	Rafael	Daniel
SECRETARIO:	Arturo	Daniel	Daniel	Rafael
TESORERO:	Rafael	Rafael	Arturo	Arturo

Ahora tenemos cuatro arreglos, ¿se trata de la misma representación?

Creo que la respuesta sería no, ya que el cambio de función que se hace a los integrantes de la representación original hace que definitivamente cada una de las representaciones trabaje de manera diferente, ¿importa el orden de los elementos en los arreglos?. La respuesta definitivamente sería sí, luego entonces las representaciones antes definidas son diferentes ya que el orden o la forma en que se asignan las funciones sí importa, por lo tanto es este caso estamos tratando con permutaciones.

A continuación obtendremos las fórmulas de permutaciones y de combinaciones, pero antes hay que definir lo que es $n!$ (ene factorial), ya que está involucrado en las fórmulas que se obtendrán y usarán para la resolución de problemas.

$n!$ = al producto desde la unidad hasta el valor que ostenta n .

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$

Ejem.

$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 10 = 3,628,800$

$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 8 = 40,320$

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 6 = 720$, etc., etc.

Obtención de fórmula de permutaciones.

Para hacer esto, partiremos de un ejemplo.



¿Cuántas maneras hay de asignar los cuatro primeros lugares de un concurso de creatividad que se verifica en las instalaciones de nuestro instituto, si hay 14 participantes?

Solución:

Haciendo uso del principio multiplicativo,

$14 \times 13 \times 12 \times 11 = 24,024$ maneras de asignar los primeros tres lugares del concurso

Esta solución se debe, a que al momento de asignar el primer lugar tenemos a 14 posibles candidatos, una vez asignado ese lugar nos quedan 13 posibles candidatos para el segundo lugar, luego tendríamos 12 candidatos posibles para el tercer lugar y por último tendríamos 11 candidatos posibles para el cuarto lugar.

Luego si n es el total de participantes en el concurso y r es el número de participantes que van a ser premiados, y partiendo de la expresión anterior, entonces.

$14 \times 13 \times 12 \times 11 = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)$

si la expresión anterior es multiplicada por $(n - r)! / (n - r)!$, entonces

$= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1) (n - r)! / (n - r)!$

$= n! / (n - r)!$

Por tanto, la fórmula de permutaciones de r objetos tomados de entre n objetos es:

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Esta fórmula nos permitirá obtener todos aquellos arreglos en donde el orden es importante y solo se usen parte (r) de los n objetos con que se cuenta, además hay que hacer notar que no se pueden repetir objetos dentro del arreglo, esto es, los n objetos son todos diferentes.

Entonces, ¿qué fórmula hay que usar para arreglos en donde se utilicen los n objetos con que se cuenta?

Si en la fórmula anterior se sustituye n en lugar de r , entonces.



$${}_nP_n = n! / (n - n)! = n! / 0! = n! / 1 = n!$$

Como $0! = 1$ de acuerdo a demostración matemática, entonces

$${}_nP_n = n!$$

Ejemplos:

- 1) ¿Cuántas representaciones diferentes serán posibles formar, si se desea que consten de Presidente, Secretario, Tesorero, Primer Vocal y Segundo Vocal?, si esta representación puede ser formada de entre 25 miembros del sindicato de una pequeña empresa.

Solución:

Por principio multiplicativo:

$25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6,375,600$ maneras de formar una representación de ese sindicato que conste de presidente, secretario, etc., etc.

Por Fórmula:

$$n = 25, \quad r = 5$$

$${}_{25}P_5 = 25! / (25 - 5)! = 25! / 20! = (25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times \dots \times 1) / (20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 1) =$$

$$= 6,375,600 \text{ maneras de formar la representación}$$

- 2) a. ¿Cuántas maneras diferentes hay de asignar las posiciones de salida de 8 autos que participan en una carrera de fórmula uno? (Considere que las posiciones de salida de los autos participantes en la carrera son dadas totalmente al azar)
- b. ¿Cuántas maneras diferentes hay de asignar los primeros tres premios de esta carrera de fórmula uno?

Solución:



a. Por principio multiplicativo:

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40,320$ maneras de asignar las posiciones de salida de los autos participantes en la carrera

Por Fórmula:

$$n = 8, \quad r = 8$$

${}_8P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots \times 1 = 40,320$ maneras de asignar las posiciones de salidaetc., etc.

b. Por principio multiplicativo:

$8 \times 7 \times 6 = 336$ maneras de asignar los tres primeros lugares de la carrera

Por fórmula:

$$n = 8, \quad r = 3$$

${}_8P_3 = 8! / (8 - 3)! = 8! / 5! = (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \dots \times 1) / (5 \times 4 \times 3 \times \dots \times 1)$
= 336 maneras de asignar los tres primeros lugares de la carrera

3) ¿Cuántos puntos de tres coordenadas (x, y, z), será posible generar con los dígitos 0, 1, 2, 4, 6 y 9?, Si, a. No es posible repetir dígitos, b. Es posible repetir dígitos.

Solución:

a. Por fórmula

$$n = 6, \quad r = 3$$

${}_6P_3 = 6! / (6 - 3)! = 6! / 3! = 6 \times 5 \times 4 \times 3! / 3! = 6 \times 5 \times 4 = 120$ puntos posibles

Nota: este inciso también puede ser resuelto por el principio multiplicativo

b. Por el principio multiplicativo



$6 \times 6 \times 6 = 216$ puntos posibles

¿Cuál es la razón por la cual no se utiliza en este caso la fórmula?. No es utilizada debido a que la fórmula de permutaciones sólo se usa cuando los objetos no se repiten, esto quiere decir que en el inciso a. Los puntos generados siempre van a tener coordenadas cuyos valores son diferentes ejem. $(1, 2, 4)$, $(2, 4, 6)$, $(0, 4, 9)$, etc. etc., mientras que los puntos generados en el inciso b. Las coordenadas de los puntos pueden tener valores diferentes o repeticiones de algunos valores o pueden tener todas las coordenadas un mismo valor ejem. $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 1)$, etc., etc.

4) a. ¿Cuántas maneras hay de asignar las 5 posiciones de juego de un equipo de básquetbol, si el equipo consta de 12 integrantes?, b. ¿Cuántas maneras hay de asignar las posiciones de juego si una de ellas solo puede ser ocupada por Uriel José Esparza?, c. ¿Cuántas maneras hay de que se ocupen las posiciones de juego si es necesario que en una de ellas este Uriel José Esparza y en otra Omar Luna?

Solución:

a. Por fórmula:

$$n = 12, \quad r = 5$$

${}_{12}P_5 = 12! / (12 - 5)! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95,040$ maneras de asignar las cinco posiciones de juego

a. Por principio multiplicativo:

$$1 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7,920 \text{ maneras de asignar las posiciones de juego}$$

Por fórmula:

$1 \times {}_{11}P_4 = 1 \times 11! / (11 - 4)! = 11! / 7! = 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7,920$ maneras de asignar las posiciones de juego con Uriel José en una determinada posición

a. Por principio multiplicativo



$1 \times 1 \times 10 \times 9 \times 8 = 720$ maneras de ocupar las diferentes posiciones de juego

Por fórmula:

$1 \times 1 \times {}_{10}P_3 = 1 \times 1 \times 10! / (10 - 3)! = 10! / 7! = 10 \times 9 \times 8 = 720$ maneras de ocupar las posiciones de juego con Uriel José y Omar Luna en posiciones previamente definidas

5) Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar, si debe constar de dos letras, seguidas de cinco dígitos, las letras serán tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9. a. Considere que se pueden repetir letras y números, b. Considere que no se pueden repetir letras y números, c. ¿Cuántas de las claves del inciso b empiezan por la letra A y terminan por el número 6?, d. ¿Cuántas de las claves del inciso b tienen la letra R seguida de la L y terminan por un número impar?

Solución:

Por principio multiplicativo:

$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 67,600,000$ claves de acceso

Por fórmula:

${}_{26}P_2 \times {}_{10}P_5 = 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 19,656,000$ claves de acceso

Por fórmula:

$1 \times {}_{25}P_1 \times {}_9P_4 \times 1 = 1 \times 25 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 75,600$ claves de acceso que empiezan por la letra A y terminan por el número 6

Por fórmula:

$1 \times 1 \times {}_9P_4 \times 5 = 1 \times 1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15,120$ claves de acceso que tienen la letra R seguida de la L y terminan por un número impar.



PERMUTACIONES CON REPETICION.

En los casos anteriores se han obtenido permutaciones en donde todos los elementos utilizados para hacer los arreglos son diferentes. A continuación se obtendrá una fórmula que nos permite obtener las permutaciones de n objetos, cuando entre esos objetos hay algunos que son iguales.

Ejemplo:

Obtenga todas las permutaciones posibles a obtener con las letras de la palabra OSO.

Solución:

Para obtener la fórmula, es necesario primero suponer que todas las letras de la palabra OSO son diferentes y para diferenciarlas pondremos subíndices a las letras O, por lo que quedaría, O_1SO_2 , y las permutaciones a obtener serían:

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

definiendo las permutaciones tenemos que estas serían,

$$O_1SO_2, O_2SO_1, SO_1O_2, SO_2O_1, O_1O_2S, O_2O_1S$$

¿Pero realmente podemos hacer diferentes a las letras O?, eso no es posible, luego entonces ¿cuántos arreglos reales se tienen?

Como:

Arreglos reales

$$O_1SO_2 = O_2SO_1 \rightarrow OSO$$

$$SO_1O_2 = SO_2O_1 \rightarrow SOO$$

$$O_1O_2S = O_2O_1S \rightarrow OOS$$



Entonces se observa que en realidad sólo es posible obtener tres permutaciones con las letras de la palabra OSO debido a que las letras O son idénticas, ¿pero qué es lo que nos hizo pensar en seis arreglos en lugar de tres?, el cambio que hicimos entre las letras O cuando las consideramos diferentes, cuando en realidad son iguales.

Para obtener los arreglos reales es necesario partir de la siguiente expresión:

El número de arreglos reales = No. de permutaciones considerando a todos los objetos como diferentes

Los cambios entre objetos iguales

$$\text{El número de arreglos reales} = 3! / 2! = 3 \times 2! / 2! = 3$$

Por tanto la fórmula a utilizar sería;

$${}_nP_{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$$

Donde:

${}_nP_{x_1, x_2, \dots, x_k}$ = Número total de permutaciones que es posible obtener con n objetos, entre los que hay una cantidad x_1 de objetos de cierto tipo, una cantidad x_2 de objetos de un segundo tipo,..... y una cantidad x_k de objetos del tipo k.

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

Ejemplos:

1) Obtenga todas las señales posibles que se pueden diseñar con seis banderines, dos de los cuales son rojos, tres son verdes y uno morado.

Solución: $n = 6$ banderines $x_1 = 2$ banderines rojos $x_2 = 3$ banderines verdes

$x_3 = 1$ banderín morado



$${}_6P_{2,3,1} = 6! / 2!3!1! = 60 \text{ señales diferentes}$$

a) ¿Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar con los números 1,1,1,2,3,3,3,3?,

b) ¿cuántas de las claves anteriores empiezan por un número uno seguido de un dos?,

c) ¿cuántas de las claves del inciso a empiezan por el número dos y terminan por el número tres?

Solución: a. $n = 8$ números $x_1 = 3$ números uno $x_2 = 1$ número dos $x_3 = 4$ números cuatro

$${}_8P_{3,1,4} = 8! / 3!1!4! = 280 \text{ claves de acceso}$$

b. $n = 6$ (se excluye un número uno y un dos)

$$x_1 = 2 \text{ números uno}$$

$$x_2 = 4 \text{ números tres}$$

$$1 \times 1 \times {}_6P_{2,4} = 1 \times 1 \times 6! / 2!4! = 15 \text{ claves de acceso}$$

El primer número uno nos indica el número de maneras como es posible colocar en la primera posición de la clave de acceso un número uno, debido a que todos los números uno son iguales, entonces tenemos una sola manera de seleccionar un número uno para la primera posición, el siguiente número uno nos indica el número de maneras como se colocaría en la segunda posición el número dos y la expresión siguiente nos indica todos los arreglos posibles que es posible diseñar con los números restantes.

c. $n = 6$ (se excluye un número dos y un tres)

$$x_1 = 3 \text{ números uno}$$

$$x_2 = 3 \text{ números tres}$$

$$1 \times {}_6P_{3,3} \times 1 = 1 \times 6! / 3!3! = 20 \text{ claves de acceso}$$

El número uno inicial nos indica que existe una sola manera de seleccionar el número dos que va en la primera posición del arreglo, mientras que el número uno final nos indica que hay una sola manera de seleccionar el número tres que va al final del arreglo aún y cuando haya cuatro números tres, como estos son iguales al diseñar una permutación es indistinto cuál número tres se ponga, ya que siempre



se tendrá el mismo arreglo y la expresión intermedia nos indica todos los arreglos posibles a realizar con los números restantes.

3) ¿De cuántas maneras es posible plantar en una línea divisoria de un terreno dos nogales, cuatro manzanos y tres ciruelos?

Solución:

$n = 9$ árboles

$x_1 = 2$ nogales

$x_2 = 4$ manzanos

$x_3 = 3$ ciruelos

$${}_9P_{2,4,3} = 9! / 2!4!3! = 1260 \text{ maneras de plantar los árboles}$$

4) Si un equipo de fútbol soccer femenino participa en 12 juegos en una temporada, ¿cuántas maneras hay de que entre esos doce juegos en que participa, obtenga 7 victorias, 3 empates y 2 juegos perdidos?

Solución: $n = 12$ juegos $x_1 = 7$ victorias $x_2 = 3$ empates $x_3 = 2$ juegos perdidos

$${}_{12}P_{7,3,2} = 12! / 7!3!2! = 7,920 \text{ maneras de que en la temporada este equipo logre siete victorias, tres}$$

PRUEBAS ORDENADAS.

Se le llama prueba ordenada al hecho de seleccionar r objetos de entre n objetos contenidos en una urna uno tras otro. Una prueba ordenada puede ser llevada a efecto de dos maneras:



- 1) Con sustitución (con reemplazo).- En este caso se
- 2) lo anterior se repite hasta que se han extraído los r objetos de la prueba, por tanto el número de pruebas ordenadas de con sustitución se obtiene:

Número total de pruebas ordenadas con sustitución = $n \times n \times n \times \dots \times n = n^r$

Hay n maneras de seleccionar el primer objeto, luego al seleccionar el segundo objeto, dado que se ha regresado a la urna el primer objeto, también se tendrán n objetos y así sucesivamente.

- 2) Sin sustitución (sin reemplazo).- En este caso se procede a seleccionar el primer objeto, el cual no es regresado a la urna, luego se selecciona el segundo objeto, lo anterior se repite hasta completar los r objetos de la prueba, por lo que el número total de pruebas ordenadas sin sustitución se obtiene:

Número total de pruebas ordenadas sin sustitución = $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$
 $= {}_n P_r$

Hay n maneras de seleccionar el primer objeto, luego al seleccionar el segundo objeto, hay $n-1$ maneras, dado que el primer objeto no se regresa a la urna, luego cuando se extrae el r -ésimo objeto, hay $(n-r+1)$ de que sea seleccionado.

Ejemplos:

- 1) ¿Cuántas maneras hay de que se asignen tres premios de un sorteo en donde el primer premio es un departamento, el segundo premio es un auto y el tercer premio es un centro de cómputo, si los participantes en este sorteo son 120 personas,
 - a) Sí la asignación se puede hacer con sustitución,
 - b) Sí la asignación se puede hacer sin sustitución.



Solución: a. Por principio multiplicativo:

$$120 \times 120 \times 120 = 1,728,000 \text{ maneras de asignar los premios}$$

Por fórmula: $n = 120, \quad r = 120$

$$n^r = 120^3 = 1,728,000 \text{ maneras de asignar los tres premios}$$

Hay que considerar que en este caso, al regresar cada boleto que es extraído de la urna, las personas que participan en el sorteo tienen la posibilidad de no ganar uno solo de los premios, de ganar un premio, dos de los premios o los tres premios. Cosa que generalmente no ocurre.

b. Por principio multiplicativo:

$$120 \times 119 \times 118 = 1,685,040 \text{ maneras de asignar los premios}$$

Por fórmula: $n = 120, \quad r = 3$

$${}_{120}P_3 = 120! / (120 - 3)! = 120! / 117! = 120 \times 119 \times 118 = 1,685,040 \text{ maneras de asignar los premios}$$

Hay que hacer notar que en este caso, como los boletos que son seleccionados ya no regresan a la urna de donde fueron extraídos, los participantes solo pueden recibir un premio en caso de que fueran de los afortunados. Esta es la forma en que generalmente se efectúa un sorteo.

2) ¿Cuántas formas hay de asignar las primeras cinco posiciones de una carrera de autos de fórmula K, si participan 26 autos en esta carrera?. Considere que la asignación es totalmente al azar.

Solución:

Esta asignación debe ser sin sustitución, esto es, se trata de una prueba ordenada sin sustitución, por lo que la solución es la que se muestra.



$$n = 26, \quad r = 5$$

$${}_{26}P_5 = 26! / (26 - 5)! = 26! / 21! = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7,893,600$$

maneras de asignar las cinco primeras posiciones de salida

3) ¿Cuántas formas hay de asignar el orden de participación de las primeras 5 concursantes de 11 finalistas de un concurso de Miss Mundo?

Solución:

Esta asignación debe realizarse sin sustitución, por lo que se trata de una prueba ordenada sin sustitución.

$$n = 11, \quad r = 5$$

$${}_{11}P_5 = 11! / (11 - 5)! = 11! / 6! = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 55,440 \text{ maneras de asignar la participación}$$

COMBINACIONES.

Como ya se mencionó anteriormente, una combinación, es un arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupan los mismos dentro del arreglo. En una combinación nos interesa formar grupos y el contenido de los mismos.

La fórmula para determinar el número de combinaciones es:

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

${}_nC_r$ = Combinaciones de r objetos tomados de entre n objetos

Donde se observa que,



$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

La expresión anterior nos explica como las combinaciones de r objetos tomados de entre n objetos pueden ser obtenidas a partir de las permutaciones de r objetos tomados de entre n objetos, esto se debe a que como en las combinaciones no nos importa el orden de los objetos, entonces si tenemos las permutaciones de esos objetos al dividirlos entre $r!$, les estamos quitando el orden y por tanto transformándolas en combinaciones, de otra forma, también si deseamos calcular permutaciones y tenemos las combinaciones, simplemente con multiplicar estas por el $r!$ obtendremos las permutaciones requeridas.

$${}_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$$

Y si deseamos $r = n$ entonces;

$${}_nC_n = n! / (n - n)!n! = n! / 0!n! = 1$$

¿Qué nos indica lo anterior?

Que cuando se desea formar grupos con la misma cantidad de elementos con que se cuenta solo es posible formar un grupo.

Ejemplos:

- 1) a. Si se cuenta con 14 alumnos que desean colaborar en una campaña pro limpieza del Tec, cuántos grupos de limpieza podrán formarse si se desea que consten de 5 alumnos cada uno de ellos, b. si entre los 14 alumnos hay 8 mujeres, ¿cuántos de los grupos de limpieza tendrán a 3 mujeres?, c. ¿cuántos de los grupos de limpieza contarán con 4 hombres por lo menos?

Solución:

a. $n = 14$, $r = 5$

$$\begin{aligned} {}_{14}C_5 &= 14! / (14 - 5)!5! = 14! / 9!5! \\ &= 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9! / 9!5! \\ &= 2002 \text{ grupos} \end{aligned}$$



Entre los 2002 grupos de limpieza hay grupos que contienen solo hombres, grupos que contienen solo mujeres y grupos mixtos, con hombres y mujeres.

b. $n = 14$ (8 mujeres y 6 hombres), $r = 5$

En este caso nos interesan aquellos grupos que contengan 3 mujeres y 2 hombres

$$\begin{aligned} {}_8C_3 \cdot {}_6C_2 &= (8! / (8-3)!3!) \cdot (6! / (6-2)!2!) \\ &= (8! / 5!3!) \cdot (6! / 4!2!) \\ &= 8 \times 7 \times 6 \times 5 / 2! \\ &= 840 \text{ grupos con 3 mujeres y 2} \end{aligned}$$

hombres, puesto que cada grupo debe constar de 5 personas

c. En este caso nos interesan grupos en donde haya 4 hombres o más

Los grupos de interés son = grupos con 4 hombres + grupos con 5 hombres

$$\begin{aligned} &= {}_6C_4 \cdot {}_8C_1 + {}_6C_5 \cdot {}_8C_0 = 15 \times 8 + 6 \times 1 = 120 + 6 \\ &= 126 \end{aligned}$$

2) Para contestar un examen un alumno debe contestar 9 de 12 preguntas, a. ¿Cuántas maneras tiene el alumno de seleccionar las 9 preguntas?, b. ¿Cuántas maneras tiene si forzosamente debe contestar las 2 primeras preguntas?, c. ¿Cuántas maneras tiene si debe contestar una de las 3 primeras preguntas?, d. ¿Cuántas maneras tiene si debe contestar como máximo una de las 3 primeras preguntas?

Solución:

a. $n = 12$, $r = 9$

$$\begin{aligned} {}_{12}C_9 &= 12! / (12-9)!9! \\ &= 12! / 3!9! = 12 \times 11 \times 10 / 3! \end{aligned}$$



= 220 maneras de seleccionar las nueve preguntas o dicho de otra manera, el alumno puede seleccionar cualquiera de 220 grupos de 9 preguntas para contestar el examen

b. ${}_2C_2 \cdot {}_{10}C_7 = 1 \times 120 = 120$ maneras de seleccionar las 9 preguntas entre las que están las dos primeras preguntas

c. ${}_3C_1 \cdot {}_9C_8 = 3 \times 9 = 27$ maneras de seleccionar la 9 preguntas entre las que está una de las tres primeras preguntas

d. En este caso debe seleccionar 0 o 1 de las tres primeras preguntas

${}_3C_0 \cdot {}_9C_9 + {}_3C_1 \cdot {}_9C_8 = (1 \times 1) + (3 \times 9) = 1 + 27 = 28$ maneras de seleccionar las preguntas a contestar

3) Una señora desea invitar a cenar a 5 de 11 amigos que tiene, a. ¿Cuántas maneras tiene de invitarlos?, b. ¿cuántas maneras tiene si entre ellos está una pareja de recién casados y no asisten el uno sin el otro, c. ¿Cuántas maneras tiene de invitarlos si Rafael y Arturo no se llevan bien y no van juntos?

Solución: a. $n = 11$, $r = 5$

$$\begin{aligned} {}_{11}C_5 &= 11! / (11 - 5)!5! = 11! / 6!5! \\ &= 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6! / 6!5! \\ &= 462 \text{ maneras de invitarlos} \end{aligned}$$

Es decir que se pueden formar 462 grupos de cinco personas para ser invitadas a cenar.

e. Esta señora tiene dos alternativas para hacer la invitación, la primera es no invitar a la pareja y la segunda es invitar a la pareja.

$${}_2C_0 \cdot {}_9C_5 + {}_2C_2 \cdot {}_9C_3 = (1 \times 126) + (1 \times 84) = 210 \text{ maneras de invitarlos}$$

En este caso separamos a la pareja de los demás invitados para que efectivamente se cumpla el que no asistan o que asistan a la cena.



f. La señora tiene dos alternativas para hacer la invitación, una de ellas es que no invitar a Rafael y a Arturo o que asista solo uno de ellos.

${}_2C_0 \cdot {}_9C_5 + {}_2C_1 \cdot {}_9C_4 = (1 \times 126) + (2 \times 126) = 126 + 252 = 378$ maneras de hacer la invitación

4) En un plano hay 10 puntos denominados A, B, C, ..., etc. etc., en una misma línea no hay más de dos puntos, a. ¿Cuántas líneas pueden ser trazadas a partir de los puntos?, b. ¿Cuántas de las líneas no pasan por los puntos A o B?, c. ¿Cuántos triángulos pueden ser trazados a partir de los puntos?, d. ¿Cuántos de los triángulos contienen el punto A?, e. ¿Cuántos de los triángulos tienen el lado AB?.

Solución:

a. En la redacción del problema se aclara que en una misma línea no hay más de dos puntos debido a que si lo anterior ocurriera no se podría dar contestación a las preguntas que se hacen.

Una línea puede ser trazada a partir de cómo mínimo dos puntos por lo tanto,

$${}_{10}C_2 = 10! / (10 - 2)!2! = 10! / 8!2! = 45 \text{ líneas que se pueden trazar}$$

b. En este caso excluirémos los puntos A y B y a partir de los ocho puntos restantes se obtendrán las líneas.

$${}_2C_0 \cdot {}_8C_2 = 1 \times 28 = 28 \text{ líneas que no pasan por los puntos A o B}$$

c. Un triángulo puede ser trazado a partir de tres puntos, luego;

$${}_{10}C_3 = 10! / (10 - 3)!3! = 10! / 7!3! = 120 \text{ triángulos posibles de trazar}$$

d. En este caso se separa el punto A de los demás, se selecciona y posteriormente también se seleccionan dos puntos más.



$${}_1C_1 \cdot {}_9C_2 = 1 \times 36 = 36 \text{ triángulos que contienen el punto A}$$

e. Los puntos A y B forman parte de los triángulos a trazar por lo que;

$${}_2C_2 \cdot {}_8C_1 = 1 \times 8 = 8 \text{ triángulos que contienen el lado AB}$$

DIAGRAMA DE ARBOL.

Un diagrama de árbol es una representación gráfica de un experimento que consta de r pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo.

Ejemplos:

1. Un médico general clasifica a sus pacientes de acuerdo a: su sexo (masculino o femenino), tipo de sangre (A, B, AB u O) y en cuanto a la presión sanguínea (Normal, Alta o Baja). Mediante un diagrama de árbol diga en cuantas clasificaciones pueden estar los pacientes de este médico?

Si contamos todas las ramas terminales, nos damos cuenta que el número de clasificaciones son $2 \times 4 \times 3 = 24$ mismas que podemos enumerar;

MAN, MAA, MAB, MBN, MBA, MBB, etc, etc.

1) Dos equipos denominados A y B se disputan la final de un partido de baloncesto, aquel equipo que gane dos juegos seguidos o complete un total de tres juegos ganados será el que gane el torneo. Mediante un diagrama de árbol diga de cuantas maneras puede ser ganado este torneo,

Solución: A = gana el equipo A B = gana el equipo B

En este diagrama se muestran que hay solo diez maneras de que se gane el torneo, que se obtienen contando las ramas terminales de este diagrama de árbol, las que es posible enumerar;

AA, ABB, ABAA, ABABA, ABABB, etc, etc.



2) Un hombre tiene tiempo de jugar ruleta cinco veces como máximo, él empieza a jugar con un dólar, apuesta cada vez un dólar y puede ganar o perder en cada juego

un dólar, él se va a retirar de jugar si pierde todo su dinero, si gana tres dólares (esto es si completa un total de cuatro dólares) o si completa los cinco juegos, mediante un diagrama de árbol, diga cuántas maneras hay de que se efectué el juego de este hombre.

Si contamos las ramas terminales nos daremos cuenta que hay 11 maneras de que este hombre lleve a cabo sus apuestas, en este diagrama se han representado los cinco juegos o apuestas que este hombre tiene tiempo de jugar.

III. PROBABILIDAD

En ocasiones cuando se habla de probabilidad o posibilidad de que un evento ocurra, se pierde la credibilidad acerca del evento en cuestión, pero ¿es posible tener siempre la certeza total en todo proyecto o actividad que se desea realizar?, es muy difícil tenerla, debido a que el llevar a efecto un proyecto cualquiera por más simple que este sea, éste está sujeto a una gran diversidad de factores que afectan su ocurrencia, ¿entonces que es lo más aconsejable para predecir su ocurrencia?, la *probabilidad* es la que nos ayuda en estos casos, ya que basándose en estadísticas, podemos cuantificar la posibilidad de ocurrencia de los eventos y por consiguiente tomar una buena decisión basados en esta información.

CONCEPTO.

La probabilidad se encarga de evaluar todas aquellas actividades en donde se tiene incertidumbre acerca de los resultados que se pueden esperar, esto quiere decir que la probabilidad está presente en casi en todas las actividades que se pretenda realizar, ejemplos:

- Cualquier proyecto de Ingeniería o de otras áreas
- Competencias deportivas
- Juegos de azar, etc., etc.



¿Cómo podemos calcular probabilidades?

1. Haciendo uso de las estadísticas.

En este caso, se hace uso de la información que se ha acumulado acerca del evento que nos interesa, y después de esto se procede a calcular las probabilidades requeridas.

Ejemplo. Determine la probabilidad de que en cierta línea de producción se manufacture un producto defectuoso, si se toma como referencia que la producción de la última semana en esta línea fue de 1,500 productos, entre los que se encontraron 8 productos defectuosos.

$p(\text{producto defectuoso}) = \text{No de productos defectuoso} / \text{Total de productos producidos en la semana}$

$$= 8 / 1500 = 0.0053$$

Lo anterior nos indica que es muy probable que 1.2 productos de cada 100 que se manufacturen en esa línea serán defectuosos.

¿Por qué se utilizó para calcular las probabilidades la información de la semana inmediata anterior?. Debido a que esta refleja la situación que guarda actualmente la producción de la línea mencionada.

2. Basándose en la experimentación.

Hay casos en los que después de repetir un número muy grande de veces un experimento, es posible determinar las probabilidades de ocurrencia de algunos eventos, tales como: La probabilidad de que aparezca águila al lanzar una moneda equilibrada, la probabilidad de que aparezca el número 3 en un dado, etc., etc.

Ejemplos:

$$p(\text{águila}) = 1/2 = 0.5$$

$$p(\text{aparezca el número 3}) = 1 / 6 = 0.1666$$



3. Asignando probabilidades.

En este caso se hace uso de las probabilidades obtenidas mediante estadísticas y la experimentación y se asignan a los eventos previamente descritos y a partir de ellas se determinan probabilidades de otros eventos.

A continuación se definen algunas cuestiones implícitas en el cálculo de probabilidades.

a) Espacio muestral (δ).– Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Es nuestro Universo.

Ejemplos:

1. Se lanza al aire un dado normal (perfectamente equilibrado), enumere los posibles resultados de este experimento.

$$\delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Se lanza al aire dos veces una moneda normal, defina su espacio muestral.

$$\delta = \{AA, AS, SA, SS\}$$

b) Evento A.– El evento A es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

1. Sea A el evento de que aparezca un número par en el lanzamiento de un dado, entonces;

$$A = \{2, 4, 6\}$$

2. Sea B el evento de que aparezcan dos águilas en tres lanzamientos de una moneda normal, entonces;

$$\text{Como } \delta = \{AAA, AAS, SAA, ASA, ASS, SAS, SSA, SSS\}$$

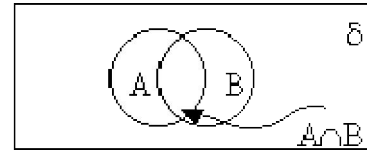
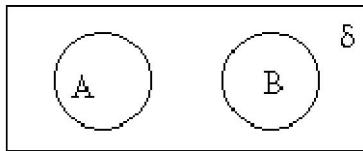
$$\text{Luego } B = \{AAS, SAA, ASA\}$$

a) Sea ϕ un evento que carece de elementos.

$$\phi = \{ \quad \quad \quad \}$$

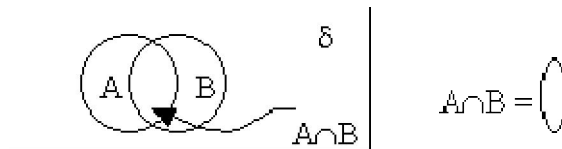
Como se observa los experimentos y eventos probabilísticos se pueden expresar con la notación de conjuntos y a continuación se enumeran algunas operaciones que es posible realizar con los eventos.

1) $A \cup B$ Es el evento que ocurre si y solo si A ocurre o B ocurre o ambos ocurren.

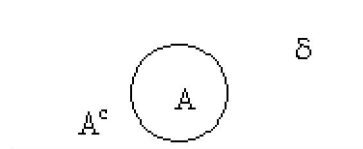


 $A \cup B =$

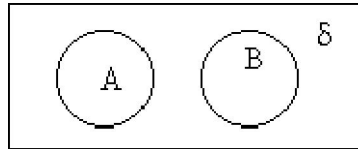
2) $A \cap B$ Es el evento que ocurre si y solo si A y B ocurren a un mismo tiempo.



3) A^c Es el complemento de A. Es el evento que ocurre si y solo si A no ocurre.



1) Se dice que A y B son eventos mutuamente excluyentes o exclusivos si $A \cap B = \phi$



Ejemplo: En un salón de clase hay 15 alumnos, 7 de los cuáles son de tercer semestre, 5 son de cuarto semestre y 3 son de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Química, de los cuales 4, 2 y 1 respectivamente dominan el Inglés, si se selecciona un alumno al azar de este grupo, a. ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea de quinto semestre?, b. ¿cuál es la probabilidad de que sea de tercero o cuarto semestre?, c. ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea de tercer semestre y domine el inglés?, d. ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado no domine el inglés?, e. Diga si los eventos T y Q son mutuamente excluyentes, diga si los eventos Q e I son mutuamente excluyentes?

Solución:

Empezaremos por definir algunos eventos;

T = evento de que un alumno sea de tercer semestre

Cu = evento de que un alumno sea de cuarto semestre

Q = evento de que un alumno sea de quinto semestre

I = evento de que un alumno domine el inglés

a. $p(\text{alumno seleccionado sea de quinto semestre}) = p(Q) = 3/15 = 0.2$

b. $p(\text{alumno seleccionado sea de tercero o cuarto semestre}) = p(T \cup Cu) =$

$= p(T) + p(Cu) = 7/15 + 5/15 = 12/15 = 0.8$

c. $p(\text{alumno sea de tercer semestre y domine el inglés}) = p(T \cap I) = 4/15 = 0.26667$

d. $p(\text{alumno seleccionado no domine el inglés}) = p(I^c) = 8/15 = 0.53333$



e. Los eventos T y Q son mutuamente excluyentes dado que $T \cap Q = \emptyset$

Los eventos Q e I no son eventos mutuamente excluyentes, ya que $Q \cap I = \{1\}$ a que hay un alumno que cumple con ambos eventos, es de quinto semestre y domina el inglés.

AXIOMAS Y TEOREMAS.

Para el cálculo de probabilidades hay que tomar en cuenta los Axiomas y Teoremas que a continuación se enumeran.

1) La probabilidad de que ocurra un evento A cualquiera se encuentra entre cero y uno.

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

1) La probabilidad de que ocurra el espacio muestral δ debe de ser 1.

$$p(\delta) = 1$$

2) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces la $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Generalizando:

Si se tienen n eventos mutuamente excluyentes o exclusivos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, entonces;

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$

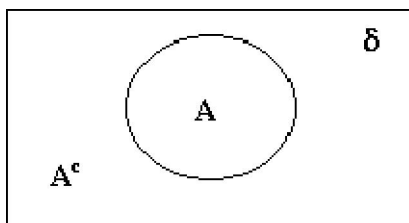
TEOREMAS

TEOREMA 1. Si $\emptyset$ es un evento nulo o vacío, entonces la probabilidad de que ocurra $\emptyset$ debe ser cero.

DEMOSTRACIÓN:

Si sumamos a ϕ un evento A cualquiera, como ϕ y A son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces $p(A \cup \phi) = p(A) + p(\phi) = p(A)$. LQQD

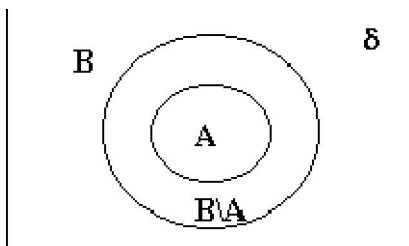
TEOREMA 2. La probabilidad del complemento de A , A^c debe ser, $p(A^c) = 1 - p(A)$



DEMOSTRACIÓN:

Si el espacio muestral δ , se divide en dos eventos mutuamente exclusivos, A y A^c luego $\delta = A \cup A^c$, por tanto $p(\delta) = p(A) + p(A^c)$ y como en el axioma dos se afirma que $p(\delta) = 1$, por tanto, $p(A^c) = 1 - p(A)$. LQQD

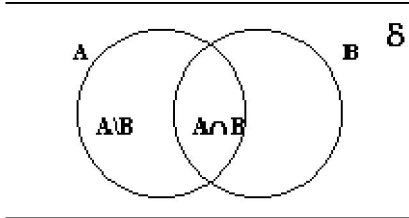
TEOREMA 3. Si un evento $A \subset B$, entonces la $p(A) \leq p(B)$.



DEMOSTRACIÓN:

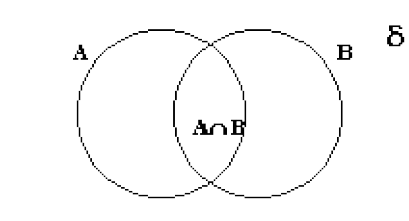
Si separamos el evento B en dos eventos mutuamente excluyentes, A y $B \setminus A$ (B menos A), por tanto, $B = A \cup (B \setminus A)$ y $p(B) = p(A) + p(B \setminus A)$, luego entonces si $p(B \setminus A) \geq 0$ entonces se cumple que $p(A) \leq p(B)$. LQQD

TEOREMA 4. La $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$



DEMOSTRACIÓN: Si A y B son dos eventos cualquiera, entonces el evento A se puede separar en dos eventos mutuamente excluyentes, $(A \setminus B)$ y $A \cap B$, por tanto, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, luego $p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$, entonces, $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$. LQDD

TEOREMA 5. Para dos eventos A y B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

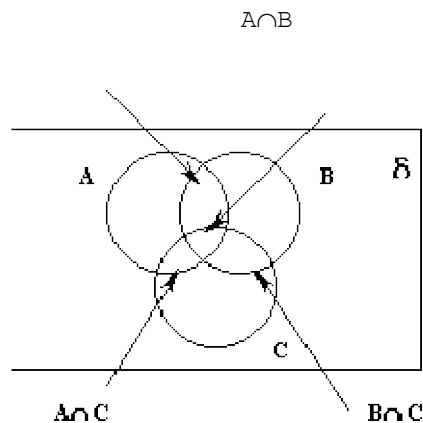


DEMOSTRACIÓN:

Si $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, donde $(A \setminus B)$ y B son eventos mutuamente excluyentes, por lo que $p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(B)$ y del teorema anterior tomamos que $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$, por tanto, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. LQDD

COROLARIO: $A \cap B \cap C$

Para tres eventos A , B y C , $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - (B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$.



ESPACIOS FINITOS DE PROBABILIDAD.

Sea δ el espacio muestral, que contiene n elementos $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, si a cada uno de los elementos de δ le asignamos una probabilidad $p_i \geq 0$, entonces estamos transformando este espacio muestral en un espacio finito de probabilidad; el que debe cumplir con las siguientes características:

- 1) Las probabilidades asociadas a cada uno de los elementos de δ deben ser mayores o iguales a cero, $p_i \geq 0$.
- 2) La sumatoria de las probabilidades asociadas a cada uno de los elementos de δ debe de ser igual a 1.

$$\sum p_i = 1$$



En caso de que no se cumpla con las características antes mencionadas, entonces no se trata de un espacio finito de probabilidad.

Ejemplos:

1. Se lanza al aire un dado normal, si la probabilidad de que aparezca una de sus caras es proporcional al número que ostenta, a) ¿cuál es la probabilidad de que aparezca un número par?, b) ¿cuál es la probabilidad de que aparezca un número primo?

Solución:

$$\delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

En este caso asignaremos las probabilidades como sigue;

$$p(\text{aparezca el número 1}) = p, \quad p(\text{aparezca el número 2}) = 2p, \quad \dots, \quad$$

$$p(\text{aparezca el número 5}) = 5p, \quad p(\text{aparezca el número 6}) = 6p$$

Y por ser δ un espacio finito de probabilidad, entonces,

$$P(\delta) = p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$$

$$\text{Por tanto, } 21p = 1, \text{ luego, } p = 1/21$$

a. Luego;

$$A = \text{evento de que aparezca un número par} = \{2, 4, 6\}$$

$$p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 2p + 4p + 6p = 12p = 12(1/21) = 12/21 = 0.5714$$

$$b. B = \text{es el evento de que aparezca un número primo} = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$p(B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(5) = p + 2p + 3p + 5p = 11p = 11(1/21) = 11/21 = 0.5238$$

2. En una competencia de nado sincronizado, participan los equipos de Ecuador, México y Venezuela, México tiene el doble de posibilidades de ganar que Ecuador, mientras que Venezuela tiene un tercio menos de posibilidades de ganar que Ecuador,



a. Determine la probabilidad de que gane Venezuela, b. Determine la probabilidad de que gane Ecuador o Venezuela, c. Determine la probabilidad de que no gane México.

Solución:

$$\delta = \{\text{Ecuador, México Venezuela}\}$$

Por ser un espacio finito de probabilidad, $p(\delta) = 1$, luego,

$$P(\delta) = p(\text{gane Ecuador}) + p(\text{gane México}) + p(\text{gane Venezuela}) = p + 3p + 2/3p = 1$$

$$\text{Como } 14/3p = 1, \quad \text{luego } p = 3/14$$

$$a. \quad p(\text{gane Venezuela}) = 2/3 \, p = 2/3 \cdot 3/14 = 2/14 = 1/7 = 0.14285$$

$$b. \quad p(\text{gane Venezuela o Ecuador}) = p(\text{gane Venezuela}) + p(\text{gane Ecuador}) =$$

$$p(\text{gane Venezuela o Ecuador}) = 2/3 \, p + p = 5/3 \, p = 5/3 \cdot 3/14 = 5/14 = 0.35714$$

$$c. \quad p(\text{no gane México}) = p(\text{gane Venezuela o Ecuador}) = 1 - p(\text{gane México}) = 1 - 3p =$$

$$= 1 - 3(3/14) = 1 - 9/14 = 5/14 = 0.35714$$

3. En una competencia de ciclismo participan A, B y C, A tiene el doble de posibilidades de ganar que B y B el doble que C, a. Determine la probabilidad de que gane B, b. Determine la probabilidad de que gane A o B.

Solución:

$\delta = \{A, B, C\}$, y por ser un espacio finito de probabilidad,

$$p(\delta) = p(\text{gane A}) + p(\text{gane B}) + p(\text{gane C}) = 4p + 2p + p = 1$$

$$\text{Como } 7p = 1, \quad \text{luego, } p = 1/7$$

$$a. \quad p(\text{gane B}) = 2p = 2(1/7) = 2/7 = 0.28571$$

$$b. \quad p(\text{gane A o B}) = 4p + 2p = 6p = 6(1/7) = 6/7 = 0.85714$$



ESPACIOS FINITOS EQUIPROBABLES.

Sea δ un espacio muestral que contiene n elementos, $\delta = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, si a cada uno de los elementos de δ le asignamos una probabilidad igual de ocurrencia, $p_i = 1/n$ por tener n elementos δ , entonces estamos transformando este espacio muestral en un espacio finito equiprobable, el que debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. Las probabilidades asociadas a cada uno de los elementos del espacio muestral deben ser mayores o iguales a cero, $p_i \geq 0$.
2. La sumatoria de las probabilidades asociadas a cada elemento del espacio muestral debe de ser igual a 1.

$$\sum p_i = 1$$

En caso de que no se cumpla con las condiciones anteriores, entonces no se trata de un *espacio finito equiprobable*.

Solo en el caso de espacios finitos equiprobables, si deseamos determinar la probabilidad de que ocurra un evento A cualquiera, entonces;

$$p(A) = r \cdot 1/n = r/n$$

$p(A)$ = maneras de ocurrir el evento A / Número de elementos del espacio muestral

r = maneras de que ocurra el evento A

$1/n$ = probabilidad asociada a cada uno de los elementos del espacio muestral

n = número de elementos del espacio muestral

Ejemplos:

1. Se lanza al aire una moneda normal (una moneda perfectamente equilibrada) tres veces, determine la probabilidad de que: a. Aparezcan puros sellos, b. Aparezcan dos águilas, c. Aparezcan por lo menos dos águilas.



Solución:

Para calcular las probabilidades de este problema, hay que definir el espacio muestral en cuestión; si representamos los tres lanzamientos de la moneda mediante un diagrama de árbol, encontraremos que el espacio muestral o el conjunto de todos los resultados posibles es:

$$\delta = \{AAA, ASS, SAS, SSA, AAS, SAA, ASA, SSS\}$$

A = evento de que aparezcan puros sellos = {SSS}

$$p(A) = p(\text{aparezcan puros sellos}) = p(SSS) = 1/8 = 0.125$$

¿Porqué un octavo?, sí el espacio muestral consta de 8 elementos como se ha observado, entonces la probabilidad asociada a cada uno de los elementos del espacio muestral es de $1/8$, por ser un espacio finito equiprobable ya que cada uno de los elementos mostrados tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

B = evento de que aparezcan dos águilas = {AAS, SAA, ASA}

$$p(B) = p(\text{aparezcan dos águilas}) = p(AAS, SAA, ASA) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8 = 0.375$$

C = evento de que aparezcan por lo menos dos águilas = {AAS, SAA, ASA, AAA}

$$p(C) = p(AAS, SAA, ASA, AAA) = p(\text{aparezcan dos águilas}) + p(\text{aparezcan tres águilas})$$

$$p(C) = 4/8 = 1/2 = 0.5$$

2. En un lote de producción que consta de 20 computadoras personales de cierta marca, se ha detectado que 4 tienen defectos de tipo operacional. 1. Si se selecciona al azar una computadora, a. Determine la probabilidad de que la computadora seleccionada tenga defectos de tipo operacional, b. ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos de tipo operacional?. 2. Si se seleccionan al azar 4 computadoras de este lote, determine la probabilidad de que: a. Solo tres tengan defectos de tipo operacional, b. Por lo menos dos tengan defectos de tipo operacional, c. Como máximo una tenga defectos de tipo operacional.



Solución:

Para el punto 2.1, cuando se selecciona de un lote un solo elemento, entonces el espacio muestral está compuesto de entes unitarios, que son cada una de las computadoras,

$$\delta = \{20 \text{ computadoras}\}$$

a. A = evento de que una computadora tenga defectos de tipo operacional

$$p(A) = 5/20 = 0.25$$

b. B = evento de que una computadora no tenga defectos de tipo operacional

$$p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0.25 = 0.75$$

2.2 Al seleccionar del lote más de una computadora, el espacio muestral ya no estará compuesto por entes unitarios, estará formado por todos los grupos que se puedan formar de 4 computadoras seleccionadas de entre 20 que se tienen,

$$\delta_{\{20C_4 = 4,845 \text{ maneras de seleccionar las cuatro computadoras al azar}\}}$$

Dicho de otra forma serían 4,845 muestras de cuatro computadoras, entre estas muestras hay algunas que contienen puras computadoras defectuosas o puras sin defectos y otras muestras que tienen una mezcla de computadoras con defectos y sin defectos.

a. C = evento de que tres de las computadoras seleccionadas tengan defectos de tipo operacional

$$C = \{ {}_4C_3 \cdot {}_{16}C_1 = 4 \cdot 16 = 64 \text{ muestras de cuatro computadoras que contienen tres defectuosas} \}$$



$$p(C) = 64/\delta = 64/4,845 = 0.013209$$

b. D = evento de que dos o más computadoras tengan defectos de tipo operacional

$$D = \{2 \text{ con defectos}, 3 \text{ con defectos o } 4 \text{ con defectos}\}$$

$$D = \{ {}_4C_2 \cdot {}_{16}C_2 + {}_4C_3 \cdot {}_{16}C_1 + {}_4C_4 \cdot {}_{16}C_0 = 6 \cdot 120 + 4 \cdot 16 + 1 = 720 + 64 + 1 = 785 \}$$

El evento D consta de 785 muestras, en las que por lo menos dos de las cuatro computadoras seleccionadas tienen defectos.

$p(D)$ = número de elementos del evento D/ número de elementos del espacio muestral

$$p(D) = 785/\delta = 785/4,845 = 0.162022$$

E = evento de que como máximo una de las computadoras seleccionadas tenga defectos de tipo operacional

$$E = \{0 \text{ con defectos o } 1 \text{ con defectos}\}$$

$$E = \{ {}_4C_0 \cdot {}_{16}C_4 + {}_4C_1 \cdot {}_{16}C_3 = 1 \cdot 1,820 + 4 \cdot 560 = 1820 + 2240 = 4,060 \text{ muestras} \}$$

El evento E contiene 4,060 muestras que contienen una o ninguna computadora defectuosa, por lo que;

$$p(E) = 4,060/\delta = 4,060/4,845 = 0.83797$$

¿Por qué utilizar combinaciones para obtener la probabilidad en lugar de permutaciones?, en este caso no se habla de algún orden para seleccionar las computadoras es el motivo por el cual se usaron combinaciones, pero si decimos



que se toman cuatro computadoras del lote y se pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que la primera y segunda computadora seleccionada tengan defectos de tipo operativo y que la tercera y cuarta no tengan defecto alguno?

En este caso el espacio muestral se determina haciendo uso de permutaciones ya que se trata de una prueba ordenada; como se observa a continuación:

$\delta = \{ {}_{20}P_4 = 20!/(20 - 4)! = 20!/16! = 116,280 \text{ maneras de seleccionar cuatro computadoras una tras otra} \}$

F = evento de que la primera y segunda computadora tengan defectos y que la tercera y cuarta no tengan defectos

$F = \{ {}_4P_2 * {}_{16}P_2 = 4 \times 3 \times 16 \times 15 = 2,880 \text{ muestras en donde la primera y segunda computadora tienen defectos y la tercera y cuarta no tienen defectos} \}$

$$p(F) = 2,880/116,280 = 0.024767$$

Se seleccionan dos números al azar de entre los dígitos del 1 al 9, a. Determine la probabilidad de que ambos números seleccionados sean pares, b. Determine la probabilidad de que ambos números sean impares.

Solución:

Para obtener el espacio muestral de este problema podemos hacer uso de un diagrama de árbol en donde se represente la selección del primer número y luego la del segundo número, encontrándose que los pares de números a elegir serían 36, como se muestran a continuación.



$(1,2)$ $(2,3)$ $(3,4)$ $(4,5)$ $(5,6)$ $(6,7)$ $(7,8)$ $(8,9)$
 $(1,3)$ $(2,4)$ $(3,5)$ $(4,6)$ $(5,7)$ $(6,8)$ $(7,9)$
 $\delta =$ $(1,4)$ $(2,5)$ $(3,6)$ $(4,7)$ $(5,8)$ $(6,9)$
 $(1,5)$ $(2,6)$ $(3,7)$ $(4,8)$ $(5,9)$
 $(1,6)$ $(2,7)$ $(3,8)$ $(4,9)$
 $(1,7)$ $(2,8)$ $(3,9)$
 $(1,8)$ $(2,9)$
 $(1,9)$

a. Definiendo un evento A = evento de que los dos números seleccionados sean pares

Luego, $A = \{(2,4), (2,6), (2,8), (4,6), (4,8), (6,8)\}$
 $p(A) = 6/36 = 1/6 = 0.1667$

b. B = evento de que los dos números seleccionados sean impares

Luego, $B = \{(1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (3,5), (3,7), (3,9), (5,7), (5,9), (7,9)\}$

$p(B) = 10/36 = 5/18 = 0.2778$

Otra forma de resolver este problema es haciendo uso de combinaciones, donde;

$\delta = \{{}_9C_2 = 36 \text{ maneras de seleccionar los dos números}\}$

a. $A = \{\text{selección de dos números de entre } (2, 4, 6 \text{ y } 8), {}_4C_2 = 6 \text{ maneras de seleccionar dos números pares}\}$



$$p(A) = {}_4C_2 / {}_9C_2 = 6/36 = 1/6 = 0.1667$$

b. $B = \{\text{selección de dos números impares, se seleccionan de entre } (1, 3, 5, 7 \text{ y } 9), {}_5C_2 = 10 \text{ maneras de hacer la selección}\}$

$$p(B) = 10/36 = 5/18 = 0.2778$$

Dada la siguiente tabla referente a la producción de flechas para camión de carga pesada; se inspeccionan 200 flechas del tipo A y B, 300 del tipo C y 400 del tipo D, a continuación se presentan los resultados obtenidos en la inspección:

DEFECTO	TIPO DE FLECHA				TOTAL
	A	B	C	D	
I	54	23	40	15	132
II	28	12	14	5	59
S-DEF	118	165	246	380	909
TOTAL	200	200	300	400	1100

Se selecciona una flecha al azar de las inspeccionadas, determine la probabilidad de que: a. La flecha seleccionada sea del tipo B, b. La flecha seleccionada no tenga defectos, c. La flecha seleccionada tenga defectos del tipo II, d. La flecha seleccionada tenga cualquier tipo de defecto.

Solución:

a. $p(\text{flecha sea tipo B}) = 200/1,100 = 0.18182$

b. $p(\text{flecha no tenga defectos}) = 909/1,100 = 0.82636$

c. $p(\text{flecha con defectos del tipo II}) = 59/1,100 = 0.05363$



$$d. p(\text{flecha tenga cualquier tipo de defecto}) = p(\text{def tipo I}) + p(\text{def tipo II})$$

$$=$$

$$= 132/1,100 + 59/1,100 = (132 + 59)/1,100 = 191/1,100 = 0.17364$$

Se diseñan placas para automóvil que consten de tres letras seguidas de cuatro dígitos, las letras se toman del abecedario y los números de los dígitos del 0 al 9, no se repiten letras y números, si se selecciona una placa al azar de las que se han diseñado, determine la probabilidad de que: a. La placa empiece por la letra D, b. La placa empiece por la letra D seguida de E, c. La placa termine por el número 4, d. La placa termine por el número 43, e. Si a un tránsito se le ha dado a la fuga un infractor, y recuerda que las placas empiezan por la letra E y terminan por el número 9; cuántas placas tendrá que revisar el tránsito?, él alcanzó a ver que no se repetían letras y números, determine también la probabilidad de que encuentre al infractor.

Solución:

a. El espacio muestral será:

$$\delta = \{ {}_{26}P_3 \cdot {}_{10}P_4 = 26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78,624,000 \text{ placas} \}$$

El espacio muestral está formado por todas las placas que es posible diseñar,

A = evento de que una placa empiece por la letra D

$$A = \{ 1 \cdot {}_{25}P_2 \cdot {}_{10}P_4 = 1 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3,024,000 \text{ placas} \}$$

$$p(A) = 3,024,000/78,624,000 = 0.03846$$

b. B = evento de que la placa empiece por la letra D seguida de la E

$$B = \{ 1 \times 1 \times 24 \times {}_{10}P_4 = 1 \times 1 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 120,960 \text{ placas} \}$$



$$p(B) = 120,960/78,624,000 = 0.0015385$$

c. C = evento de que la placa termine por el número cuatro

$$C = \{ {}_{26}P_3 * {}_9P_3 * 1 = 26 \times 25 \times 24 \times 9 \times 8 \times 7 \times 1 = 7,862,400 \text{ placas} \}$$

$$p(C) = 7,862,400/78,624,000 = 0.10$$

d. D = evento de que la placa termine por el número 43

$$D = \{ {}_{26}P_3 * {}_8P_2 \times 1 \times 1 = 26 \times 25 \times 24 \times 8 \times 7 \times 1 \times 1 = 873,600 \text{ placas} \}$$

$$p(D) = 873,600/78,624,000 = 0.01111$$

Se lanza al aire un dado normal dos veces, a. ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea de por lo menos siete?, b. ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea mayor de siete?, c. ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea de cómo máximo cinco?, d. ¿cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento aparezca el número tres?

Solución:

a. Lo primero que hay que hacer es definir el espacio muestral correspondiente, si hacemos uso de un diagrama de árbol en donde representemos el primer lanzamiento del dado y luego su segundo lanzamiento y obtendremos lo siguiente:

$$\delta = \begin{matrix} & (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) \\ & (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{matrix}$$



Como se observa, $\delta = \{36 \text{ elementos}\}$ cada uno de los cuales tiene la misma probabilidad de ocurrir, por lo que;

- A = evento de que la suma de los números que aparecen sea de por lo menos siete

A = {21 elementos que son los que suman siete o más}

(6,1)
(5,2) (6,2)
A = (4,3) (5,3) (6,3)
(3,4) (4,4) (5,4) (6,4)
(2,5) (3,5) (4,5) (5,5) (6,5)
(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6)

$$p(A) = 21/36 = 0.58333$$

- B = Evento de que la suma de los números que aparecen sea mayor de siete

B = {15 elementos, que son los que suman más de siete, 8 o más}

(6,2)
(5,3) (6,3)
B = (4,4) (5,4) (6,4)
(3,5) (4,5) (5,5) (6,5)
(2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6)

$$p(B) = 15/36 = 0.41667$$

- C = evento de que la suma de los números que aparecen sea de cómo máximo cinco



$C = \{10 \text{ elementos, los que suman 5 o menos}\}$

$(1,1) \quad (2,1) \quad (3,1) \quad (4,1)$
 $C = (1,2) \quad (2,2) \quad (3,2)$
 $(1,3) \quad (2,3)$
 $(1,4)$

$$p(C) = 10/36 = 5/18 = 0.27778$$

- $D =$ Evento de que en el primer lanzamiento aparezca el número tres

$D = \{(3,1) \quad (3,2) \quad (3,3) \quad (3,4) \quad (3,5) \quad (3,6)\}$

$$p(D) = 6/36 = 1/6 = 0.16667$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea δ un espacio muestral en donde se ha definido un evento E , donde $p(E) > 0$, si deseamos determinar la probabilidad de que ocurra un evento A (el que también es definido en el mismo espacio muestral), dado que E ya ocurrió, entonces deseamos determinar una probabilidad de tipo condicional, la que se determina como se muestra;

$$p(A|E) = \frac{p(A \cap E)}{p(E)}$$

Donde:

$p(A|E)$ = probabilidad de que ocurra A dado que E ya ocurrió

$p(A \cap E)$ = probabilidad de que ocurra A y E a un mismo tiempo

$p(E)$ = probabilidad de que ocurra E



Luego;

$$P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|S|}$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

Por tanto:

$$P(A | E) = \frac{|A \cap E|}{|E|}$$

Donde:

$|A \cap E|$ = número de elementos comunes a los eventos A y E

$|E|$ = número de elementos del evento E

Luego entonces podemos usar cualquiera de las dos fórmulas para calcular la probabilidad condicional de A dado que E ya ocurrió.

Ejemplos:

1. Se lanza al aire dos dados normales, si la suma de los números que aparecen es de por lo menos siete, a. determine la probabilidad de que en el segundo dado aparezca el número cuatro, b. Determine la probabilidad de que ambos números sean pares, c. Determine la probabilidad de que en el primer dado aparezca el número dos.



Solución:

El espacio muestral es el mismo que cuando se lanza un dado dos veces y se muestra a continuación;

(1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1)

(1,2) (2,2) (3,2) (4,2) (5,2) (6,2)

$\delta =$ (1,3) (2,3) (3,3) (4,3) (5,3) (6,3)

(1,4) (2,4) (3,4) (4,4) (5,4) (6,4)

(1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (5,5) (6,5)

(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6)

a. Calcular una probabilidad condicional es necesario definir los eventos A y E, siendo estos,

A = evento de que en el segundo dado aparezca el número cuatro,

E = evento de que la suma de los números que aparecen sea de por lo menos siete, (que es que es el evento que está condicionando)

$E = \{21 \text{ elementos, los que suman siete o más}\}$



$(6,1)$

$(5,2) \quad (6,2)$

$E = (4,3) \quad (5,3) \quad (6,3)$

$(3,4) \quad (4,4) \quad (5,4) \quad (6,4)$

$(2,5) \quad (3,5) \quad (4,5) \quad (5,5) \quad (6,5)$

$(1,6) \quad (2,6) \quad (3,6) \quad (4,6) \quad (5,6) \quad (6,6)$

$A = \{6 \text{ elementos, los que en el segundo dado aparece el cuatro}\}$

$A = \{(1,4) \quad (2,4) \quad (3,4) \quad (4,4) \quad (5,4) \quad (6,4)\}$

Luego,

$A \cap E = \{(3,4) \quad (4,4) \quad (5,4) \quad (6,4)\}, \quad |A \cap E| = 4 \text{ elementos}$

Por tanto;

$p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 4/21 = 0.19048$

b. E = Evento de que la suma de los números que aparecen sea de por lo menos siete



$(6,1)$

$(5,2) (6,2)$

$E = (4,3) (5,3) (6,3)$

$(3,4) (4,4) (5,4) (6,4)$

$(2,5) (3,5) (4,5) (5,5) (6,5)$

$(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6)$

A = evento de que ambos números sean pares

$(2,2) (4,2) (6,2)$

$A = (2,4) (4,4) (6,4)$

$(2,6) (4,6) (6,6) (6,2)$

$A \cap E = (4,4) (6,4) \quad |A \cap E| = 6 \text{ elementos}$

$(2,6) (4,6) (6,6)$

$p(A|E) = |A \cap E| / |E|$

$= 6 / 21$

$= 0.28571$



c. E = Evento de que la suma de los números que aparecen sea de por lo menos siete

$(6,1)$

$(5,2)$ $(6,2)$

$E =$ $(4,3)$ $(5,3)$ $(6,3)$

$(3,4)$ $(4,4)$ $(5,4)$ $(6,4)$

$(2,5)$ $(3,5)$ $(4,5)$ $(5,5)$ $(6,5)$

$(1,6)$ $(2,6)$ $(3,6)$ $(4,6)$ $(5,6)$ $(6,6)$

A = Evento de que en el primer dado aparezca el número dos

$(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(2,4)$

$(2,5)$ $(2,6)$

$A \cap E = \{(2,5)\}, \quad |A \cap E| = 1 \text{ elemento}$

$P(A|E) = |A \cap E| / |E|$

$= 1/21$

$= 0.04762$

2. Se seleccionan al azar dos números de entre los números del 1 al 9, si la suma de los números que aparecen es par, a. Determine la probabilidad de que ambos números sean pares, b. Determine la probabilidad de que ambos números sean impares.



Solución:

$\delta = \{ {}_9C_2 = 36 \text{ maneras de seleccionar dos números de entre nueve que se tienen} \}$

(1, 2)

(1, 3) (2, 3)

(1, 4) (2, 4) (3, 4)

$\delta =$ (1, 5) (2, 5) (3, 5) (4, 5)

(1, 6) (2, 6) (3, 6) (4, 6) (5, 6)

(1, 7) (2, 7) (3, 7) (4, 7) (5, 7) (6, 7)

(1, 8) (2, 8) (3, 8) (4, 8) (5, 8) (6, 8) (7, 8)

(1, 9) (2, 9) (3, 9) (4, 9) (5, 9) (6, 9) (7, 9) (8, 9)

a. E = Evento de que la suma de los números que se seleccionan sea par

(1, 3)

(2, 4)

E = (1, 5) (3, 5)

(2, 6) (4, 6)

(1, 3) (3, 7) (5, 7)

(2, 8) (4, 8) (6, 8)



$(1, 9) (3, 9) (5, 9) (7, 9)$

$E = \{16 \text{ elementos}\}$

$A =$ evento de que ambos números sean pares

$(2, 4)$

$A = (2, 6) (4, 6)$

$(2, 8) (4, 8) (6, 8)$

$A = \{6 \text{ elementos}\}$

$(2, 4)$

$A \cap E = (2, 6) (4, 6)$

$(2, 8) (4, 8) (6, 8)$

$|A \cap E| = 6 \text{ elementos}, \quad p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 6/16 = 0.375$

b. $E =$ Evento de que la suma de los números seleccionados es par

$(1, 3) \quad (2, 4)$

$E = (1, 5) (3, 5)$

$(2, 6) (4, 6) \quad (1, 3) (3, 7) (5, 7) \quad (2, 8) (4, 8) (6, 8) \quad (1, 9) (3, 9)$
 $(5, 9) (7, 9)$



A = evento de que ambos números sean impares

$(1, 3)$

$A = (1, 5) (3, 5)$

$(1, 7) (3, 7) (5, 7)$

$(1, 9) (3, 9) (5, 9) (7, 9)$

$A = \{10 \text{ elementos}\},$

$(1, 3)$

$A \cap E = (1, 5) (3, 5)$

$(1, 7) (3, 7) (5, 7)$

$(1, 9) (3, 9) (5, 9) (7, 9)$

$$|A \cap E| = 10 \text{ elementos}; \quad p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 10/16 = 0.625$$

Este ejercicio también puede ser resuelto haciendo uso de las combinaciones; el espacio muestral puede ser definido;

$$\delta = \{{}_9C_2 = 36 \text{ maneras de seleccionar los dos números}\}$$

a. E = Evento de que la suma de los números seleccionados sea par

Para que la suma de dos números sea par, forzosamente ambos deben ser pares o impares, por tanto,

$$E = \{\text{selección de dos números pares o de dos impares} = {}_4C_2 + {}_5C_2\}$$

A = evento de que ambos números sean pares

$$A = \{ {}_4C_2 \}$$

$$A \cap E = \{ {}_4C_2 = 6 \text{ maneras de seleccionar dos números pares} \}$$

$$|A \cap E| = 6 \text{ elementos}$$

$$p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 6/16 = 0.375$$

b. E = Evento de que la suma de los números seleccionados sea par

$$E = \{ {}_4C_2 + {}_5C_2 = 16 \text{ maneras de seleccionar dos números de entre nueve} \}$$

A = Evento de que ambos números sean impares

$$A = \{ {}_5C_2 = 10 \text{ maneras de seleccionar dos números impares} \}$$

$$|A \cap E| = \{ {}_5C_2 = 10 \}$$

$$p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 10/16 = 0.625$$

3. Dada la siguiente tabla referente a la producción de flechas para camión de carga pesada; se inspeccionan 200 flechas del tipo A y B, 300 del tipo C y 400 del tipo D, a continuación se presentan los resultados obtenidos en la inspección;

TIPO		FLECHA			
DEFECTO	A	B	C	D	TOTAL
I	54	23	40	15	132
II	28	12	14	5	59
S - DEF	118	165	246	380	909
TOTAL	200	200	300	400	1100



- a. Si se selecciona una flecha al azar y resulta que es una flecha del tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos, b. Si la flecha seleccionada es del tipo C, ¿cuál es la probabilidad de que tenga defectos del tipo II?, c. Si la flecha seleccionada tiene defectos del tipo I, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo A, d. ¿cuál es la probabilidad de que una flecha no tenga defectos?, e. ¿cuál es la probabilidad de que una flecha tenga defectos?

Solución:

- a. Definiremos los eventos;

E = evento de que la flecha seleccionada sea del tipo B = {200 elementos o flechas}

A = Evento de que la flecha seleccionada no tenga defectos = {909 flechas o elementos}

$A \cap E = \{165 \text{ elementos del tipo B y que no tienen defectos}\}$

$$p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 165/200 = 0.825$$

b. E = Evento de que la flecha sea del tipo C = {300 flechas}

A = Evento de que la flecha tenga defectos del tipo II = {59 flechas}

$A \cap E = \{14 \text{ flechas del tipo C y que tienen defectos del II}\}$

$$p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 14/300 = 0.04667$$

c. E = Evento de que la flecha tenga defectos del tipo I = {132 flechas}

A = Evento de que la flecha sea del tipo A = {200 flechas}

$A \cap E = \{54 \text{ flechas con defectos del tipo I y del tipo A}\}$

$$p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 54 / 132 = 0.40901$$



d. En este caso se trata de una probabilidad simple, ya que no hay un evento que esté condicionando al evento del cual se desea determinar su probabilidad

$D = \text{Evento de que una flecha no tenga defectos} = \{909 \text{ flechas}\}$

$\delta = \{1100 \text{ flechas}\}$

$p(D) = 909/1100 = 0.82636$

d. $F = \text{Evento de que una flecha tenga defectos} = \{132 + 59 = 191 \text{ flechas}\}$

$\delta = \{1100 \text{ flechas}\}$

$p(F) = 191 / 1100 = 0.17364$

4. Una pareja de recién casa dos ha decidido formar una familia de solo tres hijos, a. determine la probabilidad de que tenga puros hijos varones, b. ¿cuál es la probabilidad de que tenga como máximo un hijo varón, c. ¿cuál es la probabilidad de que su segundo hijo sea varón, d. Si esta familia tiene por lo menos una hija, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo hijo sea varón?, e. Si esta familia tiene como máximo un hijo varón, ¿cuál es la probabilidad de que tenga puras hijas?

Solución:

Lo primero que hay que obtener para resolver este problema es el espacio muestral, para lo cual nos podemos ayudar con un diagrama de árbol en donde representemos uno tras otro el nacimiento de cada uno de sus hijos, en donde solo consideraremos partos de un solo bebé, no múltiples y se considera que existe la misma probabilidad de que nazca un varón o una niña.

Y el espacio muestral obtenido es: $H = \text{niño}$ $M = \text{niña}$

$\delta = \{HHH, HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM\}$

a. $A = \text{evento de que la familia tenga puros hijos varones}$

$A = \{HHH\}$



$$p(A) = 1/8 = 0.125$$

b. B = Evento de que la familia tenga como máximo un hijo varón

$$B = \{\text{ningún hijo varón o un hijo varón}\} = \{MMM, HMM, MHH, MMH\}$$

$$p(B) = 4/8 = 1/2 = 0.5$$

c. C = Evento de que el segundo hijo de la familia sea varón

$$C = \{HHH, HHM, MHH, MHM\}$$

$$P(C) = 4/8 = 1/2 = 0.5$$

d. Como en este caso se trata de calcular una probabilidad de tipo condicional, se requiere definir dos eventos, el evento E que es el que condiciona y el evento A;

E = Evento de que la familia tenga por lo menos una hija

$$E = \{\text{tenga una o más hijas}\}$$

$$E = \{HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM\} = \{7 \text{ elementos}\}$$

A = Evento de que el segundo hijo sea varón

$$A = \{HHH, HHM, MHH, MHM\}$$

$$A \cap E = \{HHM, MHH, MHM\} = \{3 \text{ elementos}\}$$

Luego;

$$p(A|E) = |A \cap E| / |E| = 3/7 = 0.42857$$

e. E = Evento de que la familia tenga como máximo un hijo varón

A = Evento de que la familia tenga puras hijas



$$E = \{MMM, MHM, MMH, HMM\} = \{4 \text{ elementos}\}$$

$$A = \{MMM\}$$

$$A \cap E = \{MMM\} = \{1 \text{ elemento}\}$$

$$P(A|E) = |A \cap E| / |E| = 1/4 = 0.25$$

5. Según las estadísticas, la probabilidad de que un auto que llega a cierta gasolinera cargue gasolina es de 0.79, mientras que la probabilidad de que ponga aceite al motor es de 0.11 y la probabilidad de que ponga gasolina y aceite al motor es de 0.06, a. Si un auto carga gasolina, ¿cuál es la probabilidad de que ponga aceite?, b. Si un auto pone aceite al motor, ¿cuál es la probabilidad de que ponga gasolina?

Solución:

a. E = Evento de que un auto cargue gasolina

$$b. p(E) = 0.79$$

A = Evento de que un auto ponga aceite al motor $P(A) = 0.11$

$A \cap E$ = Evento de que un auto ponga gasolina y aceite $p(A \cap E) = 0.07$

$$p(A|E) = p(A \cap E) / p(E) = 0.07 / 0.79 = 0.0881$$

c. E = Evento de que un auto ponga aceite al motor

$$P(E) = 0.11$$

A = Evento de que un auto ponga gasolina

$$P(A) = 0.79$$



$A \cap E$ = Evento de que un auto ponga aceite al motor y ponga gasolina

$$P(A \cap E) = 0.07$$

$$P(A|E) = p(A \cap E) / p(E) = 0.07 / 0.11 = 0.63636$$

6.- La probabilidad de que un auto de carreras cargue gasolina en cierto circuito en la primera media hora de recorrido es de 0.58, la probabilidad de que cambie de neumáticos en esa primera media hora de recorrido es de 0.16, la probabilidad de que cargue gasolina y cambie de neumáticos en la primera media hora de recorrido es de 0.05, a. ¿Cuál es la probabilidad de que cargue gasolina o cambie de neumáticos en la primera media hora de recorrido?, b. ¿cuál es la probabilidad de que no cargue combustible y de neumáticos en la primera media hora de recorrido, c. Si el auto cambia de neumáticos en la primera media hora de recorrido, ¿cuál es la probabilidad de que cargue combustible también?, d. Si el auto carga combustible en la primera media hora de recorrido, ¿cuál es la probabilidad de que cambie de neumáticos también?

Solución:

a. A = Evento de que cargue gasolina en la primera media hora de recorrido

$$P(A) = 0.58$$

B = Evento de que cambie de neumáticos en la primera hora de recorrido

$$P(B) = 0.16$$

$A \cap B$ = Evento de que cargue combustible y cambie de neumáticos en la primera hora de recorrido

$$P(A \cap B) = 0.05$$

$$\begin{aligned} P(\text{cargue gasolina o cambie de neumáticos}) &= p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0.58 + 0.16 - 0.05 = 0.69 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } p(\text{no cargue combustible y no cambie de neumáticos}) &= 1 - p(A \cup B) = 1 \\ &- 0.69 = 0.31 \end{aligned}$$

c. E = evento de que el auto cambie de neumáticos en la primera media hora de recorrido

A = Evento de que el auto cargue combustible en la primera media hora de recorrido

$$p(A|E) = p(A \cap E) / p(E) = 0.05/0.16 = 0.3125$$

d. E = Evento de que el auto cargue combustible en la primera media hora de recorrido

A = Es el evento de que el auto cambie de neumáticos en la primera media hora de recorrido

$$p(A|E) = p(A \cap E) / p(E) = 0.05/0.58 = 0.08621$$

TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓN PARA PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Tomando como referencia la fórmula de probabilidad condicional,

$$p(A|E) = \frac{p(A \cap E)}{p(E)}$$

Despejando,

$p(A \cap E) = p(E)p(A|E)$ Teorema de la multiplicación para probabilidad condicional

dónde:

$p(A \cap E)$ = probabilidad de que ocurran A y E

$p(E)$ = probabilidad de que ocurra E

$p(A|E)$ = probabilidad de que ocurra el evento A dado que el evento E ya ocurrió

Ejemplos:

1. En un lote de producción hay 25 productos, 5 de los cuales tienen defectos menores y 9 tienen defectos mayores, si se toman de este lote tres productos uno tras otro, determine la probabilidad de que: a. El primer producto no tenga defectos y que el segundo y tercero tengan defectos mayores, b. El primer producto



tenga defectos menores, el segundo tenga defectos mayores y que el tercero no tenga defectos, c. El primer producto y el tercero no tengan defectos.

Solución:

a. Definiremos algunos eventos;

B_1 = evento de que el primer producto seleccionado no tenga defectos

DM_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos mayores

DM_3 = evento de que el tercer producto seleccionado tenga defectos mayores

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap DM_2 \cap DM_3) &= p(B_1) p(DM_2 | B_1) p(DM_3 | B_1 \cap DM_2) \\ &= (11/25) * (9/24) * (8/23) \\ &= 0.44 * 0.375 * 0.347826 \\ &= 0.05739 \end{aligned}$$

b. Dm_1 = evento de que el primer producto seleccionado tenga defectos menores

DM_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos mayores

B_3 = evento de que el tercer producto seleccionado no tenga defectos

$$\begin{aligned} P(Dm_1 \cap DM_2 \cap B_3) &= p(Dm_1) p(DM_2 | Dm_1) p(B_3 | Dm_1 \cap DM_2) \\ &= (5/25) * (9/24) * (11/23) = \\ &= 0.2 * 0.375 * 0.4782608 = 0.03587 \end{aligned}$$

c. B_1 = evento de que el primer producto seleccionado no tenga defectos

B_2 = evento de que el segundo producto seleccionado no tenga defectos

Dm_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos menores

DM_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos mayores

B_3 = evento de que el tercer producto seleccionado no tenga defectos

En este caso como no se especifica de que tipo debe ser el segundo producto, se considera que este puede ser no defectuoso, con defectos menores o con defectos mayores; por lo tanto;

$$\begin{aligned} &p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap Dm_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap DM_2 \cap B_3) \\ &= p(B_1) p(B_2 | B_1) p(B_3 | B_1 \cap B_2) + p(B_1) p(Dm_2 | B_1) p(B_3 | B_1 \cap Dm_2) + \\ &p(B_1) p(DM_2 | B_1) p(B_3 | B_1 \cap DM_2) \end{aligned}$$

$$= (11/25) * (10/24) * (9/23) + (11/25) * (5/24) * (10/23) + (11/25) * (9/24) * (10/23)$$

$$= (0.44) (0.41666) (0.39130) + (0.44) (0.20833) (0.43478) + (0.44) (0.375) (0.43478)$$

$$= 0.07173 + 0.03985 + 0.07174$$
$$= 0.18332$$

2. Doce personas (6 mujeres, 4 hombres y dos niños) realizan un paseo en un pequeño autobús, al llegar a cierto lugar, bajan del autobús cuatro personas una tras otra, determine la probabilidad de que; a. La primera y segunda persona que bajen sean mujeres, el tercero sea un niño y por último baje un hombre, b. Que baje un niño, luego un hombre, luego otro niño y por último que baje una mujer, c. Que baje una mujer, luego un hombre, después otra mujer y por último otro hombre.

Solución:

- a. M_1 = Evento de que baje del autobús primero una mujer
 M_2 = Evento de que baje en segundo lugar una mujer
 N_3 = Evento de que baje en tercer lugar un niño
 H_4 = Evento de que baje en cuarto lugar un hombre

$$P(M_1 \cap M_2 \cap N_3 \cap H_4) = p(M_1) p(M_2 | M_1) p(N_3 | M_1 \cap M_2) p(H_4 | M_1 \cap M_2 \cap N_3) =$$
$$= (6/12) * (5/11) * (2/10) * (4/9)$$
$$= 240/11,880 = 0.0202$$

- b. N_1 = Evento de que baje en primer lugar un niño
 H_2 = Evento de que baje en segundo lugar un hombre
 N_3 = Evento de que baje en tercer lugar un niño
 M_4 = Evento de que baje en cuarto lugar una mujer

$$p(N_1 \cap H_2 \cap N_3 \cap M_4) = p(N_1) p(H_2 | N_1) p(N_3 | N_1 \cap H_2) p(M_4 | N_1 \cap H_2 \cap N_3) =$$
$$= (2/12) * (4/11) * (1/10) * (6/9)$$
$$= 48/11,880$$
$$= 0.00404$$

c. M_1 = evento de que baje en primer lugar una mujer

H_2 = evento de que baje en segundo lugar un hombre

M_3 = evento de que en tercer lugar baje una mujer

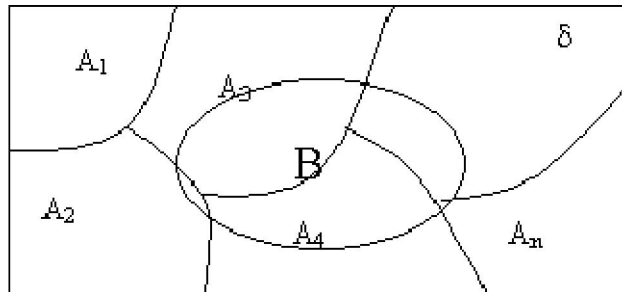
H_4 = evento de que en cuarto lugar baje un hombre

$$\begin{aligned} p(M_1 \cap H_2 \cap M_3 \cap H_4) &= p(M_1) p(H_2 | M_1) p(M_3 | M_1 \cap H_2) p(H_4 | M_1 \cap H_2 \cap M_3) \\ &= (6/12) * (4/11) * (5/10) * (3/9) \\ &= 360/11,880 \\ &= 0.0303 \end{aligned}$$

TEOREMA DE BAYES

Sea δ un espacio muestral que está formado por los eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ mutuamente excluyentes, luego,

$$\delta = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$



Luego si ocurre un evento B definido en δ , observamos que;

$$\begin{aligned} B &= \delta \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \cap B = \\ &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \end{aligned}$$

Donde cada uno de los eventos $A_i \cap B$ son eventos mutuamente excluyentes, por lo que

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

y como la $p(A_i \cap B) = p(A_i)p(B|A_i)$, o sea que la probabilidad de que ocurra el evento A_i y el evento B es igual al teorema de la multiplicación para probabilidad condicional, luego;

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1)p(B|A_1) + p(A_2)p(B|A_2) + p(A_3)p(B|A_3) + \\ &+ p(A_n)p(B|A_n) \end{aligned}$$

Si deseamos calcular la probabilidad de que ocurra un evento A_i dado que B ya ocurrió, entonces;

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

La expresión anterior es el teorema de Bayes, que como se observa es una simple probabilidad condicional.

Ejemplos:

1. Tres máquinas denominadas A, B y C, producen un 43%, 26% y 31% de la producción total de una empresa respectivamente, se ha detectado que un 8%, 2% y 1.6% del producto manufacturado por estas máquinas es defectuoso, a. Se selecciona un producto al azar y se encuentra que es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el producto haya sido fabricado en la máquina B?, b. Si el producto seleccionado resulta que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en la máquina C?

Solución: HACER EL DIAGRAMA DE ARBOL

Para resolver este problema nos ayudaremos con un diagrama de árbol;

a. Definiremos los eventos;

D = Evento de que el producto seleccionado sea defectuoso (evento que condiciona)

A = Evento de que el producto sea fabricado en la máquina A

B = Evento de que el producto sea fabricado por la máquina B

C = Evento de que el producto sea fabricado por la máquina C

$$\begin{aligned} P(B|D) &= \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D|B)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)} \\ P(B|D) &= \frac{(0.26 \cdot 0.02)}{(0.43 \cdot 0.08 + 0.26 \cdot 0.02 + 0.31 \cdot 0.016)} \\ &= 0.0052 / 0.04456 \\ &= 0.116697 \end{aligned}$$

b. ND = evento de que el producto seleccionado no sea defectuoso (evento que condiciona)

A = evento de que el producto sea fabricado en la máquina A

B = evento de que el producto sea fabricado por la máquina B

C = evento de que el producto sea fabricado por la máquina C

$$\begin{aligned} P(C|ND) &= p(C \cap ND) / p(ND) = p(C) p(ND|C) / p(A) p(ND|A) + p(B) p(ND|B) + \\ & p(C) p(ND|C) \\ &= 0.31 \cdot 0.984 / (0.43 \cdot 0.92 + 0.26 \cdot 0.98 + \\ & 0.31 \cdot 0.984) \\ &= 0.30504 / 0.95544 \\ &= 0.31927 \end{aligned}$$

2. Una empresa recibe visitantes en sus instalaciones y los hospeda en cualquiera de tres hoteles de la ciudad; Palacio del Sol, Sicomoros o Fiesta Inn, en una proporción de 18.5%, 32% y 49.5% respectivamente, de los cuales se ha tenido información de que se les ha dado un mal servicio en un 2.8%, 1% y 4% respectivamente, a. Si se selecciona a un visitante al azar ¿cuál es la probabilidad de que no se le haya dado un mal servicio?, b. Si se selecciona a un visitante al azar y se encuentra que el no se quejó del servicio prestado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en el Palacio del Sol?, c. Si el visitante seleccionado se quejó del servicio prestado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en el hotel Fiesta Inn?

3. Solución: Haciendo uso de un diagrama de árbol;

a. NQ = Evento de que un visitante no se queje del servicio

PS = Evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Palacio del Sol

S = Evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Sicómoro

FI = Evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$\begin{aligned} P(NQ) &= p(PS) p(NQ|PS) + p(S) p(NQ|S) + p(FI) p(NQ|FI) = \\ &= 0.185 \cdot 0.972 + 0.32 \cdot 0.99 + 0.495 \cdot 0.96 \\ &= 0.17982 + 0.3168 + 0.4752 \\ &= 0.97182 \end{aligned}$$



b. NQ = Evento de que un visitante no se queje del servicio

PS = Evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Palacio del Sol

S = Evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Sicomoro

= Evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$P(PS|NQ) = p(PS \cap NQ) / p(NQ)$$

$$= (0.185 \cdot 0.972) / (0.185 \cdot 0.972 + 0.32 \cdot 0.99 + 0.495 \cdot 0.96) =$$

$$= 0.17982 / (0.17982 + 0.3168 + 0.4752)$$

$$= 0.17982 / 0.97182$$

$$= 0.1850342$$

c. Q = Evento de que un visitante se queje del servicio

FI = Evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$P(FI|Q) = p(FI \cap Q) / p(Q)$$

$$= 0.495 \cdot 0.04 / (0.185 \cdot 0.028 + 0.32 \cdot 0.01 +$$

$$0.495 \cdot 0.04)$$

$$= 0.0198 / (0.00518 + 0.0032 + 0.0198)$$

$$= 0.0198 / 0.02818$$

$$= 0.7026$$

INDEPENDENCIA

Se dice que un evento B es independiente de un evento A , si $p(B|A) = p(B)$, esto quiere decir que la probabilidad de que ocurra B no es afectada por la ocurrencia del evento A , la expresión anterior se puede sustituir en el teorema de la multiplicación para probabilidad condicional,

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A) = p(A)p(B)$$

Luego,

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

Concepto de independencia

Si la expresión anterior se cumple, podemos decir que los eventos A y B son independientes.

Ejemplos:

Pruebas repetidas e independientes.

Sea δ el espacio muestral del lanzamiento de una moneda tres veces,



$$\delta = \{AAA, AAS, ASA, ASS, SAS, SAA, SSA, SSS\}$$

Donde cada uno de los elementos de este espacio muestral está formado por tres pruebas repetidas e independientes que son los tres lanzamientos de la moneda, si deseamos determinar la probabilidad de cada uno de los elementos, nos encontraremos con lo siguiente;

$$p(AAA) = p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) p(A_2 | A_1) p(A_3 | A_1 \cap A_2) = p(A) p(A) p(A) = 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$$

$$p(AAS) = p(A) p(A) p(S) = 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$$

$$p(ASA) = p(A) p(S) p(A) = 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$$

etc, etc.

Con lo anterior se comprueba que efectivamente la probabilidad de cada uno de los elementos del espacio muestral descrito anteriormente es de 1/8 como se consideraba cuando se calculaban probabilidades para un espacio finito equiprobable.

Ejemplos:

1. Un equipo de fútbol soccer tiene una probabilidad de ganar de 0.6, una probabilidad de empatar de 0.3 y una probabilidad de perder de 0.1, si este equipo participa en dos juegos la semana próxima, determine la probabilidad de que; a. Gane el segundo juego, b. Gane ambos juegos, c. Gane uno de los juegos, d. Gane el primer juego y empate el segundo.

El espacio muestral sería:

$$\delta = \{GG, GE, GP, EG, EE, EP, PG, PE, PP\}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \text{a. } p(\text{gane el segundo juego}) &= p(GG, EG, PG) = (0.6)(0.6) + (0.3)(0.6) + \\ & (0.1)(0.6) = \\ & = 0.36 + 0.18 + 0.06 = 0.6 \end{aligned}$$

$$\text{b. } p(\text{gane ambos juegos}) = p(GG) = (0.6)(0.6) = 0.36$$

$$\begin{aligned} \text{c. } p(\text{gane uno de los juegos}) &= p(GE, GP, EG, PG) = (0.6)(0.3) + (0.6)(0.1) + \\ & (0.3)(0.6) + (0.1)(0.6) \end{aligned}$$

$$= 0.18 + 0.06 + 0.18 + 0.06 = 0.48$$



$$d. p(\text{gane el primero y empate el segundo}) = p(GE) = (0.6)(0.3) = 0.18$$

2. Un boxeador gana 8 de cada 10 peleas en las que compite, si este boxeador participará en tres peleas en los próximos seis meses, determine la probabilidad de que; a. Gane dos de las peleas, b. Si gana dos de las peleas, ¿cuál es la probabilidad de que sean la primera y tercera peleas?, c. Gane la segunda pelea.

Del diagrama anterior obtenemos el siguiente espacio muestral;

$$\delta = \{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}$$

$$a. p(\text{gane dos de las peleas}) = p(GGP, GPG, PGG) = (0.8)(0.8)(0.2) + (0.8)(0.2)(0.8) + (0.2)(0.8)(0.8) = 0.128 + 0.128 + 0.128 = 0.384$$

b. E = evento de que gane dos peleas

$$E = \{GGP, GPG, PGG\}, \quad p(E) = 0.348$$

A = evento de que gane la primera y la tercer pelea

$$A = \{GGG, GPG\}$$

$$A \cap B = \{GPG\}, \quad p(A \cap B) = (0.8)(0.2)(0.8) = 0.128$$

$$P(A|E) = p(A \cap E) / p(E) = 0.128 / 0.348 = 0.3678$$

$$c. p(\text{gane la segunda pelea}) = p(GGG, GGP, PGG, PGP) = (0.8)(0.8)(0.8) + (0.8)(0.8)(0.2) + (0.2)(0.8)(0.8) + (0.2)(0.8)(0.2) = 0.512 + 0.128 + 0.128 + 0.032 = 0.8$$

3. Tres hombres tiran a un blanco, A tiene 1/3 de posibilidades de acertar al blanco, B tiene 1/2 de posibilidades de acertar y C tiene 1/4 de posibilidades de pegar al blanco, si cada uno de ellos hace un solo disparo, determine la probabilidad de que; a. Solo uno de ellos acierte al blanco, b. Si solo uno de ellos acierta al blanco, ¿cuál es la probabilidad de que acierte A?, c. Determine la probabilidad de que ninguno acierte al blanco.



Solución:

Haciendo uso de un diagrama de árbol se obtiene el siguiente espacio muestral;

$$\delta = \{ABC, ABC', AB'C, AB'C', A'BC, A'BC', A'B'C, A'B'C'\}$$

dónde: A = acierta A, A' = no acierta A, B = acierta B, B' = no acierta B, etc., etc.

$$p(\text{solo uno de ellos acierte al blanco}) = p(AB'C', A'BC', A'B'C) = 1/3 * 1/2 * 3/4 + 2/3 * 1/2 * 3/4 + 2/3 * 1/2 * 1/4 = 3/24 + 6/24 + 2/24 = 11/24 = 0.45833$$

a. E = evento de que solo uno de ellos acierte al blanco

$$E = \{AB'C', A'BC', A'B'C\}; \quad p(E) = 11/24$$

$$A = \text{evento de que A acierte al blanco} = \{ABC, ABC', AB'C, AB'C'\}$$

$$A \cap E = \{AB'C'\} = 1/3 * 1/2 * 3/4 = 3/24$$

$$p(A|E) = p(A \cap E) / p(E) = (3/24) / (11/24) = 3/11 = 0.27273$$

$$a. p(\text{ninguno acierte al blanco}) = p(A'B'C') = 2/3 * 1/2 * 3/4 = 6/24 = 0.25$$



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®

Cuadernillo para Curso Propedéutico 2021



MATEMÁTICAS



CURSO PROPEDÉUTICO 2021

MATEMÁTICAS

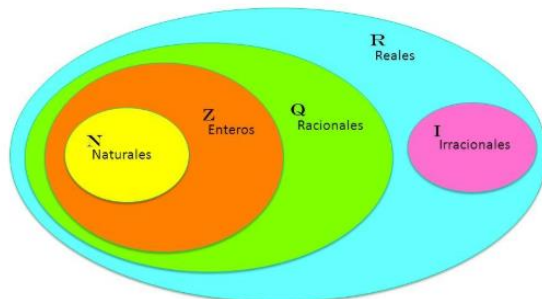


CONTENIDO

TEMA	PÁGINA
NÚMEROS REALES	1
OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES	2
▪ SUMA Y RESTA	2
▪ MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN	3
EXPRESIONES ALGEBRAICAS	5
▪ Monomios. Operaciones.	5
▪ Polinomios. Operaciones.	8
▪ División de polinomios.	10
PRODUCTOS NOTABLES	15
FACTORIZACIÓN	16

NÚMEROS REALES.

Los números reales, constituyen el conjunto fundamental bajo el cual podemos obtener resultados cuantitativos en varias disciplinas, ingenierías y ciencias afines. Los números reales se clasifican, mediante subconjuntos, como se muestra en la siguiente figura.



Números Naturales.

Es una de las primeras aplicaciones de las matemáticas en la vida real. Las propiedades más importantes de este conjunto es la existencia de un orden, la existencia del 1 como primer elemento, que todo número natural tiene otro como sucesor y que todo número natural (excepto el 1), tiene otro número natural como antecesor. El conjunto de números naturales se denota por N , y se define como:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

Números Enteros.

El conjunto de números naturales está contenido en los números enteros (Z), los cuales se definen como:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Números Racionales.

El cociente $\frac{x}{y}$ no siempre pertenece al conjunto de los números enteros, por

ejemplo: $\frac{3}{8}$. Por lo que, en este caso, es necesario definir un nuevo

conjunto, que se denota con Q .

$$Q = \{x/x = \frac{p}{q} \text{ tales que } p, q \in Z, q \neq 0\}$$

Números Irracionales.

Se define como el conjunto de números que no son racionales:

$$I = \{x/x \text{ es una expansión decimal infinita no periódica}\}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES.

SUMA Y RESTA.

La suma de números racionales con un denominador común es un número racional cuyo numerador es la suma de los numeradores y cuyo denominador es el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

En general, para dos números racionales cualesquiera, la definición de suma es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Por lo tanto, la definición de la resta es:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{3}{4} &= \frac{2(4) + 3(3)}{4(3)} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12} \\ \frac{3}{8} - \frac{2}{3} &= \frac{3(3) - 2(8)}{8(3)} = \frac{9 - 16}{24} = -\frac{7}{24} \end{aligned}$$

Ejercicio.-Realiza la siguiente suma de fracciones:

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{4} =$$

Paso 1.-Primero se calcula el mcm de 6 y 4:

6	4	2	
3	2	2	
3	1	3	
1	1		2 x 2 x 3 = 12 m.c.m

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2(2) + 3(3)}{12} = \frac{4 + 9}{12} = \frac{13}{12}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

Para dos números racionales cualesquiera, la definición de multiplicación es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

por lo tanto, la definición de división es:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{(5)(4)}{(3)(2)} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{(3)(3)}{(5)(2)} = \frac{9}{10}$$

Ejercicio. Escribe Cada expresión como una fracción simple reducida a su mínima expresión.



$$a) \frac{3 + \frac{3}{5}}{5 - \frac{1}{8}} =$$

$$b) \frac{4 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{5} - 6} =$$

$$c) \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{2}{5}} =$$

$$d) \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}}{\frac{7}{10} - 2} =$$

$$e) \frac{\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right)} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) =$$

$$f) \left(\frac{5}{3} - 1\right) \left(\frac{7}{2} - 2\right) =$$

$$g) \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{12}\right) \left(-\frac{1}{2} + 6\right) =$$

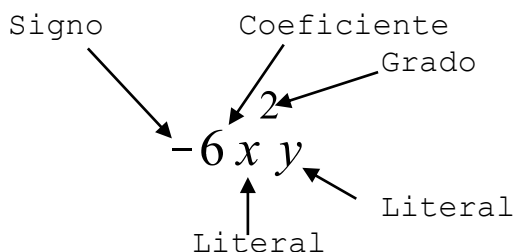
$$h) \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{4}\right) =$$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Una expresión algebraica es una expresión que se obtiene sumando, restando, multiplicando, dividiendo y calculando raíces de constantes y/o variables. Los términos que constituyen una expresión algebraica son los siguientes:

- 1.-Signo
- 2.-Literal
- 3.-Coeficiente y,
- 4.-Grado

Ejemplo:



Las expresiones algebraicas se dividen en dos:

a) Monomio. Es una expresión algebraica que consta de un sólo término, por ejemplo:

$$3a, -5b, 3x^2y, 4xy^5$$

Las operaciones que pueden realizarse con monomios, son la suma, resta, multiplicación y división.

La suma y resta, puede realizarse siempre y cuando se tengan dos monomios con la parte literal semejante, es decir,

$$3x^2y^3 + 4x^2y^3 = 7x^2y^3$$

$$6xy^2 - xy^2 = 5xy^2$$

En la multiplicación, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de los elementos con la misma base, por ejemplo:

$$(2x^2y^3z^3)(3x^2y^2z^2) = 6x^4y^5z^5$$

En cuanto a la división, se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de los elementos con la misma base, por ejemplo:

$$\frac{6x^4y^3z^6}{3x^2y^2z^2} = 2x^2yz^4$$

EJERCICIO.- REALIZA LAS SIGUIENTES OPERACIONES.

a) $-(a + b) + (-a - b) - (-b + a) + (3a + b) =$

b) $7m^2 - \{-[m^2 + 3n - (5 - n) - (-3 + m^2)]\} - (2n + 3) =$

c) $-\{-[-(a + b)]\} - \{+[-(-b - a)]\} - a + b =$

d) $-[3m + \{-m - (n - (m + 4))\} + \{-(m + n) + (-2n + 3)\}] =$

e) $(2x + 3)(3x^2) =$

f) $(2x + 3y^2)(-2x^2y) =$

g) $\left(-\frac{2}{5}x^3y + \frac{5}{3}xy^4\right)\left(\frac{1}{2}y^2z\right) =$

h) $\left(\frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 3x^2\right) + (2x^4 - 5x + 1) + \left(5x^3 - \frac{2}{5}x^6\right) =$

i) $\left(\frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 3x^2\right)(2x^4 - 5x + 1)\left(5x^3 - \frac{2}{5}x^6\right) =$

j) $(-a^m)(-2ab)(-3a^2b^x) =$

k) $(a^mb^x)(-a^2)(-2ab)(-3a^2x) =$

l) $\left(\frac{1}{2}x^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^2x\right)\left(-\frac{3}{5}a^4m\right) =$

$$m) \left(-\frac{1}{2}x^2y \right) \left(-\frac{3}{5}xy^2 \right) \left(-\frac{10}{3}x^3 \right) \left(-\frac{3}{4}x^2y \right) =$$

$$n) \frac{\frac{a}{x} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{a}{x}} =$$

$$\tilde{n}) \frac{x - 1 - \frac{12}{x - 2}}{x + 6 + \frac{16}{x - 2}} =$$

$$o) \frac{a - \frac{a}{b}}{b - \frac{1}{b}} =$$

$$p) \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} =$$

$$q) \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} =$$

$$r) \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} =$$

$$s) \frac{a - 4 + \frac{4}{a}}{1 - \frac{2}{a}} =$$

$$t) \frac{\frac{2a^2 - b^2}{a} - b}{\frac{4a^2 + b^2}{4ab} + 1} =$$

$$u) \frac{a - x + \frac{x^2}{a+x}}{a^2 - \frac{a^2}{a+x}} =$$

$$v) \frac{\frac{1}{a} - \frac{9}{a^2} + \frac{20}{a^3}}{\frac{16}{a} - a} =$$

$$w) \frac{a+2 - \frac{7a+9}{a+3}}{a-4 + \frac{5a-11}{a+1}} =$$

b) Polinomios. Es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

por ejemplo:

$$2x^2 - 5x + 2, \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{5}$$

Las operaciones con polinomios, son las mismas que para los monomios, tomando en cuenta las siguientes consideraciones. Para la suma y resta, se suman o se restan según el caso, los términos que tienen el mismo grado, por ejemplo:

$$\text{Sea } P(x) = x^4 - 2x + 3 \text{ y } Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$\text{Encuentra: a) } P(x) + Q(x) =$$

$$\text{b) } P(x) - Q(x) =$$

Solución:

$$\text{a) } P(x) + Q(x) = (x^4 - 2x + 3) + (x^3 - 2x^2 - x + 2) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 5$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(x) - Q(x) &= (x^4 - 2x + 3) - (x^3 - 2x^2 - x + 2) = x^4 - 2x + 3 - x^3 + 2x^2 + x - 2 \\ &= x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

Con respecto a la multiplicación, se multiplican todos los términos de un polinomio por todos los términos del otro; es importante tomar en cuenta las siguientes reglas.

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}, \quad (xy)^n = x^n y^n$$

Por ejemplo:

$$\text{Sea } R(x) = x^2 + 2x + 1 \text{ y } S(x) = x + 1$$

$$\text{Encuentra: } R(x) \cdot S(x) =$$

Solución:

$$\begin{aligned} R(x) \cdot S(x) &= (x^2 + 2x + 1)(x + 1) \\ &= x^2 \cdot x + 2x \cdot x + 1 \cdot x + x^2 \cdot 1 + 2x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

RESUELVE.

Sean

$$f(x) = 3x^2$$

$$s(x) = 2x^3 - x + 5$$

$$m(x) = 7x^4 + x^2 - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2x - 3}$$

$$t(x) = x^2 + x + 2$$

$$n(x) = \frac{x - 1}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{x + 1}{x}$$

I.- Realiza la suma, diferencia, producto y cociente entre:

a) f y g

b) h y n

c) m y s

II.-Resuelve: $t(x) - m(x) + s(x)$

III.-Resuelve: $n(x) - g(x) + h(x)$

IV.-Multiplicar:

$$a) \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b \quad \text{por} \quad \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$$

$$b) \frac{3}{4}m^3 - \frac{1}{2}m^2n + \frac{2}{5}mn^2 - \frac{1}{4}n^3 \quad \text{por} \quad \frac{2}{3}m^2 + \frac{5}{2}n^2 - \frac{2}{3}mn$$

$$c) \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^3 \quad \text{por} \quad \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}x$$

$$d) \frac{2}{7}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{5}x^2y \quad \text{por} \quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{5}{6}y^2$$

$$e) 3x(x^2 - 2x + 1)(x - 1)(x + 1)$$

$$f) a^x(a^{x+1} + b^{x+2})(a^{x+1} - b^{x+2})b^x$$

$$g) (a^m - 3)(a^{m-1} + 2)(a^{m-1} - 1)$$

La división de polinomios.

Es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente). De ésta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

Por ejemplo, al dividir

$$\frac{a^{x+3}b^{m+2}}{a^{x+2}b^{m+1}} = a^{x+3-(x+2)}b^{m+2-(m+1)} = a^{x+3-x-2}b^{m+2-m-1} = ab$$

Por otro lado, al dividir dos polinomios, se considera lo siguiente:

- Se ordenan el dividendo y el divisor con relación a una misma variable,
- Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y se tendrá el primer término del cociente,
- Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante, si algún término de éste producto no tiene semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor,
- El residuo obtenido en el paso anterior se trata como un nuevo dividendo y se repiten con él los pasos anteriores.

EJEMPLOS.

$$\begin{array}{rcl}
 1) \quad \frac{x^3 - 12x^2 - 42}{x - 3} & \begin{array}{l} \text{Divisor} \\ x - 3 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Cociente} \\ x^2 - 9x + 27 \\ \hline x^3 - 12x^2 + 0x - 42 \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ -9x^2 + 0x \\ \underline{-9x^2 + 27x} \\ -27x - 42 \\ \underline{-27x + 81} \\ -123 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Dividendo} \\ \end{array} \\
 & & \text{Residuo}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2) \quad \frac{3x^2 - 5x + 10}{4x - 5} & \begin{array}{l} \text{Divisor} \\ 4x - 5 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Cociente} \\ \frac{3}{4}x - \frac{5}{16} \\ \hline 3x^2 - 5x + 10 \\ \underline{3x^2 - \frac{15}{4}x} \\ -\frac{5}{4}x + 10 \\ \underline{-\frac{5}{4}x + \frac{25}{16}} \\ \frac{135}{16} \end{array}
 \end{array}$$

$$3) \frac{3a^{x+5} + 19a^{x+3} - 10a^{x+4} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1}}{a^2 - 3a + 5}$$

Ordenando términos se tiene:

$$\frac{3a^{x+5} - 10a^{x+4} + 19a^{x+3} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1}}{a^2 - 3a + 5}$$

$$\begin{array}{r} 3a^{x+3} - a^{x+2} + a^{x+1} \\ a^2 - 3a + 5 \overline{) 3a^{x+5} - 10a^{x+4} + 19a^{x+3} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1}} \\ \underline{-3a^{x+5} + 9a^{x+4} - 15a^{x+3}} \phantom{- 8a^{x+2} + 5a^{x+1}} \\ -a^{x+4} + 4a^{x+3} - 8a^{x+2} \phantom{+ 5a^{x+1}} \\ \underline{a^{x+4} - 3a^{x+3} + 5a^{x+2}} \phantom{+ 5a^{x+1}} \\ a^{x+3} - 3a^{x+2} + 5a^{x+1} \\ \underline{-a^{x+3} + 3a^{x+2} - 5a^{x+1}} \\ 0 \end{array}$$

RESUELVE CORRECTAMENTE LAS SIGUIENTES DIVISIONES.

$$1) \frac{m^5 - 5m^4n + 20m^2n^3 - 16mn^4}{m^2 - 2mn - 8n^2}$$

$$2) \frac{x^6 + 6x^3 - 2x^5 - 7x^2 - 4x + 6}{x^4 - 3x^2 + 2}$$

$$3) \frac{3x^3y - 5xy^3 + 3y^4 - x^4}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$4) \frac{16x^4 - 27y^4 - 24x^2y^2}{8x^3 - 9y^3 + 6xy^2 - 12x^2y}$$

$$5) \frac{3m^7 - 11m^5 + m^4 + 18m^3 - 8m - 3m^2 + 4}{m^4 - 3m^2 + 4}$$

$$6) \frac{x^{11} - 5x^9y^2 + 8x^7y^4 - 6x^5y^6 - 5x^3y^8 + 3xy^{10}}{x^5 - 2x^3y^2 + 3xy^4}$$

$$7) \frac{3a^9 - 15a^7 + 14a^6 - 28a^4 + 47a^3 - 28a^2 + 23a - 10}{3a^5 - 6a^3 + 2a^2 - 3a + 2}$$

$$8) \frac{x^{10} - y^{10}}{x^2 - y^2}$$

$$9) \frac{x^5 + y^5}{x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4}$$

$$10) \frac{x^3a - 17x^3a^{-2} + x^3a^{-1} + 3x^3a^{-4} + 2x^3a^{-3} - 2x^3a^{-5}}{x^2a^{-1} - 2x^2a^{-3} - 3x^2a^{-2}}$$

$$11) \frac{m^{a+4} - m^{a+3} + 6m^{a+1} - 5m^a + 3m^{a-1}}{m^2 - 2m + 3}$$

$$12) \frac{a^{x+3} + a^x}{a + 1}$$

$$13) \frac{m^{2a-2} - m^{2a-1} - 4m^{2a} + 2m^{2a+1} + 2m^{2a+2} - m^{2a+3}}{m^{a-3} - m^{a-1} + m^{a-2}}$$

$$14) \frac{3a^{5m-3} - 23a^{5m-2} + 5a^{5m-1} + 46a^{5m} - 30a^{5m+1}}{a^{3m-3} + 6a^{3m-1} - 8a^{3m-2}}$$

$$15) \frac{2x^{3a+1}y^{2x-3} - 4x^3ay^{2x-2} - 28x^{3a-2}y^{2x} + 30x^{3a-3}y^{2x+1}}{-x^{a+2}y^{x-1} - 3x^ay^{x+1} + 4x^{a+1}y^x}$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS.

$$\frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3}{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y \overline{) \begin{array}{l} \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 \\ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2y \\ \hline -\frac{2}{9}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 \\ \frac{2}{9}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 \\ \hline \frac{1}{6}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 \\ -\frac{1}{6}xy^2 + \frac{3}{8}y^3 \\ \hline 0 \end{array}} \end{array}$$

EJERCICIO.-REALIZA LAS SIGUIENTES DIVISIONES.

$$1) \frac{\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b}$$

$$2) \frac{\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^2}{x - \frac{2}{5}y}$$

$$3) \frac{\frac{3}{5}m^4 + \frac{1}{10}m^3n - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{1}{6}mn^3 - n^4}{\frac{3}{2}m^2 + 2n^2 - mn}$$

$$4) \frac{\frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5} + \frac{19}{30}x}{2x^3 - \frac{1}{3}x + 2}$$

$$5) \frac{\frac{9}{4}a^4 - a^3x + \frac{13}{18}ax^3 - \frac{1}{12}a^2x^2 - \frac{1}{3}x^4}{\frac{3}{2}a^2 - ax + \frac{2}{3}x^2}$$

$$6) \frac{\frac{3}{8}x^5 + \frac{21}{40}x^4 - \frac{47}{120}x^3 + \frac{79}{120}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{10}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^3}$$

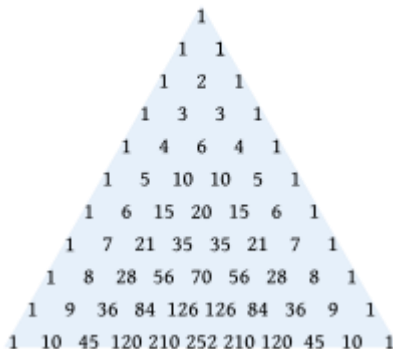
$$7) \frac{\frac{99}{40}m^3n^2 - \frac{101}{60}m^2n^3 + \frac{1}{2}m^5 - \frac{5}{6}m^4n + \frac{7}{6}mn^4 - \frac{5}{8}n^5}{\frac{3}{4}m^3 - \frac{1}{2}m^2n + \frac{2}{5}mn^2 - \frac{1}{4}n^3}$$

PRODUCTOS NOTABLES.

Se llaman productos notables, a ciertos productos que cumplen con reglas fijas y definidas, cuyo resultado puede ser escrito fácilmente (por inspección), sin haber realizado la multiplicación.

Producto notable		Expresión algebraica	Nombre
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$	Binomio al cuadrado
$(a + b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Binomio al cubo
$a^2 - b^2$	=	$(a + b)(a - b)$	Diferencia de cuadrados
$a^3 - b^3$	=	$(a - b)(a^2 + b^2 + ab)$	Diferencia de cubos
$a^3 + b^3$	=	$(a + b)(a^2 + b^2 - ab)$	Suma de cubos
$a^4 - b^4$	=	$(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$	Diferencia cuarta
$(a + b + c)^2$	=	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Trinomio al cuadrado

Triángulo de Pascal



Ejercicio. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $(2x^2 - 7y^3)^2 =$

b) $(2x + 5)(x + 3)^3 =$

c) $(2a - 7b)(2a + 7b) =$

d) $(2a - 7b)^2 =$

e) $(x + y - 3)(x + y - 3) =$

f) $2x(x - 4)^2 - (x + 4)(x - 4) =$

g) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{5}\right)^2 =$

h) $\left(\frac{3}{5}rs - \frac{1}{2}t^3\right)^2 =$

i) $(3ab - 5x^2)^2 =$

j) $(a^2b^2 + c^2)(a^2b^2 - c^2) =$

k) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 =$

l) $\left(\frac{x}{2} - 3y\right)^2 =$

m) $\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{3y^2}{5}\right)\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{3y^2}{5}\right) =$

n) $(x^{a+1} + y^{x-2})^2 =$

ñ) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^3 - \frac{1}{3}\right)^2 =$

FACTORIZACIÓN

En álgebra, la factorización de polinomios se utiliza para simplificar la tarea de encontrar la solución de ecuaciones, simplificar expresiones y en general para facilitar su manipulación.

Métodos de Factorización.

a) *Factorización de polinomios por término común.*

La forma más simple de factorización es cuando todos los términos del polinomio tienen un factor común, por ejemplo:

i) $20m^2n^3 + 24m^3n + 30mn^2 = 2mn(10mn^2 + 12m^2 + 15n)$

ii) $(a + b^3) + (a + b^3)x + (a + b^3)z = (a + b^3)(1 + x + z)$

EJERCICIO.-Factoriza los siguientes polinomios que tienen factor común.

1) $4a^2b + 6abx^5 =$

2) $5b^2cx - 60a^2b^2c^5x^2 =$

3) $12m^3n^3 - 18m^2n^2 - 24m^4n^4 =$

4) $5x^2y^2 - 15xy + 20xyz =$

5) $14acd - 7cd + 21c^2d^2 =$

6) $16x^3 - 4x^2 =$

7) $7w(w^3 + 1) - 9(w^3 + 1) =$

8) $a^2 + 1 - b(a^2 + 1) =$

9) $3x^3 - 6x^2 + 9x =$

10) $(x+y) \cdot 2z + (x+y)4z^2 =$

b) *Factorización de polinomios por diferencia de cuadrados.* $(a^2 - b^2)$

Este tipo de polinomios resultan de la multiplicación de expresiones de la forma:

$$(a - b)(a + b)$$

Entonces para encontrar la factorización de polinomios que son diferencia de cuadrados solo hay que calcular:

$$a = \sqrt{a^2}$$

$$b = \sqrt{b^2}$$

Por ejemplo: Factorizar $(14x^2 - 56)$

$$(14x^2 - 56) = 14(x^2 - 4)$$

$$a^2 = x^2$$

$$b^2 = 4$$

$$a = \sqrt{x^2}$$

$$b = \sqrt{4}$$

$$a = x$$

$$b = 2$$

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

$$14(x^2 - 4) = 14(x - 2)(x + 2)$$

EJERCICIO.-Factoriza por medio de diferencia de cuadrados.

1) $25 - 36x^4 =$

2) $4x^2 - 9m^2n^4 =$

3) $1 - (a + b)^2 =$

4) $(x + y)^2 + z^2 =$

5) $x^{2n} - y^{2n} =$

6) $81a^6 - 100b^8 =$

7) $(2a - 3b)^2 - (c + d)^2 =$

8) $25(x + y)^2 - 441(x - y)^2 =$

9) $4x^2 - a^2 + y^2 - 4xy + 2ab - b^2 =$

10) $49x^{10n} - \frac{b^{12n}}{81}$

c) *Factorización de trinomios que son cuadrados perfectos.*

Se identifica por tener tres términos, de los cuales dos tienen raíces exactas, y el término restante equivale al doble producto de las raíces.

Para solucionarlo debemos considerar lo siguiente:

1.-Organizar los términos dejando en los extremos los que tengas raíces exactas.

2.-Extraer la raíz cuadrada del primero y tercer término, los cuales se escribirán dentro de un paréntesis, separados por el signo del segundo término.

3.-El paréntesis se eleva al cuadrado.

Ejemplo: Al factorizar: $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$

$$400x^{10} + 40x^5 + 1 = (20x^5 + 1)^2$$

EJERCICIO.-Factoriza las siguientes expresiones.

1) $a^2 - 6ab^2 + 9b^4 =$

2) $x^2 + 14x + 49 =$

$$3) \frac{a^2}{9} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{4} =$$

$$4) 9x^{2n} + 6x^ny + y^2 =$$

$$5) 0.09x^2 + 0.12xy + 0.04y^2 =$$

$$6) \frac{1}{4}x^2 - 3y + 9y^2 =$$

$$7) a^2x^2 - 6ax + 9 =$$

$$8) -8z + 1 + 16z^2 =$$

$$9) 49 + a^2 - 14a =$$

$$10) x^{4n} - 18x^{2n} + 81 =$$

d) Factorización de trinomios que **no son** cuadrados perfectos.

Presentan la forma: $acx^2 + mx + bd = (ax + b)(cx + d)$ de modo que $ad + bc = m$
Por ejemplo.

$$12x^2 - x - 35 = (4x - 7)(3x + 5)$$

EJERCICIO.-Factoriza las siguientes expresiones.

$$1) 6x^2 + 11x - 10 =$$

$$2) 2x^2 + 11x + 5 =$$

$$3) 6x^2 - 5x - 6 =$$

$$4) m^2 + abcm - 56a^2b^2c^2$$

$$5) x^2 - 6 - x =$$

$$6) 12 - 8n + n^2 =$$

$$7) 20 + a^2 - 21a =$$

$$8) 21r^2 - 38rs + 5s^2 =$$

$$9) y^2 - 12y + 11 =$$

$$10) a^2 - 11a + 28 =$$

e) *Factorización de polinomios por agrupación de términos.*

La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo, los dos términos que se agrupen deben tener algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro del paréntesis después de sacar el factor común en cada grupo, sean exactamente iguales.

Después de lo anterior se utiliza el procedimiento del Factor Común.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

EJERCICIO.-Factoriza los siguientes polinomios agrupando términos.

$$1) 3m^2 - 6mn + 4m - 8n =$$

$$2) 2x^2 - 3xy - 4x + 6y =$$

$$3) a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y =$$

$$4) a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x =$$

$$5) 2ab^2 + b^3 - 5b^2 + 6a + 3b - 15 =$$

$$6) ab + 1 + abx + x =$$

$$7) 6ab^3x - 4b^3 + 21ax - 14 =$$

$$8) 2a - 4b + 2c^2 - axy + 2bxy - c^2xy =$$

$$9) 2b^3 + 3c^3 - 2b^3x - 3c^3x =$$

$$10) 6ab^3x - 4b^3 + 21ax - 14 =$$

f) Factorización de binomios del tipo $x^n + y^n$

Se pueden dividir en cuatro clases:

i) Suma o diferencia de cubos.

$$(a^3 + b^3) = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo: $(27a^3 + 125b^3) = (3a + 5b) (9a^2 - 15ab + 25b^2)$

$$(a^3 - b^3) = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo: $(8a^3 - 64b^3) = (2a - 4b) (4a^2 + 8ab + 16b^2)$

ii) Binomios del tipo $x^n - y^n$ para $n > 3$ y divisible por 2

Ejemplo: $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2) (x^2 + y^2)$
 $= (x - y) (x + y) (x^2 + y^2)$

iii) Binomios del tipo $x^n \pm y^n$ para $n > 3$ y divisible por 3

Ejemplo: $x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2) [(x^2)^2 - x^2y^2 + (y^2)^2]$
 $= (x^2 + y^2) (x^4 - x^2y^2 + y^4)$

iv) Binomios del tipo $x^n + y^n$ para $n > 3$ y no divisible por 2 ni por 3

Se puede factorizar usando las siguientes fórmulas:

$$x^n + y^n = (x + y) (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n - y^n = (x - y) (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Ejemplos:

1) $x^{10} - y^{10} = (x^5)^2 - (y^5)^2 = (x^5 + y^5) (x^5 - y^5)$
 $= (x + y) (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) (x - y) (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$
 $= (x + y) (x - y) (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

$$\begin{aligned}
 2) \quad b^{15} - c^{15} &= (b^5)^3 - (c^5)^3 \\
 &= (b^5 - c^5) \left[(b^5)^2 + b^5 c^5 + (c^5)^2 \right] \\
 &= (b - c) (b^4 + b^3 c + b^2 c^2 + b c^3 + c^4) (b^{10} + b^5 c^5 + c^{10})
 \end{aligned}$$

EJERCICIO.- Aplicando los métodos de factorización, reduce las siguientes fracciones algebraicas.

- 1) $\frac{3ab}{2a^2x + 2a^3}$
- 2) $\frac{15a^2bn - 45a^2bm}{10a^2b^2n - 30a^2b^2m}$
- 3) $\frac{a^2 - a - 20}{a^2 - 7a + 10}$
- 4) $\frac{(m - n)^2}{m^2 - n^2}$
- 5) $\frac{a^2 - ab - 6b^2}{ax - 4a - 2bx + 8b}$
- 6) $\frac{a^3 + 1}{a^4 - a^3 + a - 1}$
- 7) $\frac{3x^3 + 9x^2}{x^2 + 6x + 9}$
- 8) $\frac{(x^6 - y^6)(x + y)}{(x^3 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)}$
- 9) $\frac{(x^3 - 3x)(x^3 - 1)}{(x^4 + x^3 + x^2)(x^2 - 1)}$
- 10) $\frac{x^4 + x - x^3y - y}{x^3 - x - x^2y + y}$
- 11) $\frac{4a^2 - (x - 3)^2}{(2a + x)^2 - 9}$



$$12) \quad \frac{m^3 n + 3 m^2 n + 9 mn}{m^3 - 27}$$

$$13) \quad \frac{m^2 n^2 + 3 mn - 10}{4 - 4 mn + m^2 n^2}$$

$$14) \quad \frac{(a - b)^3}{(b - a)^2}$$

$$15) \quad \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 8x + 16)}{(x^2 - 4x)(1 - x^2)}$$

$$16) \quad \frac{(x - 2)^2(x^2 + x - 12)}{(2 - x)(3 - x)^2}$$

$$17) \quad \frac{3 mx - nx - 3 my + ny}{ny^2 - nx^2 - 3 my^2 + 3 mx^2}$$

$$18) \quad \frac{(1 - a)^3}{a - 1}$$

$$19) \quad \frac{8 - a^3}{a^2 + 2a - 8}$$